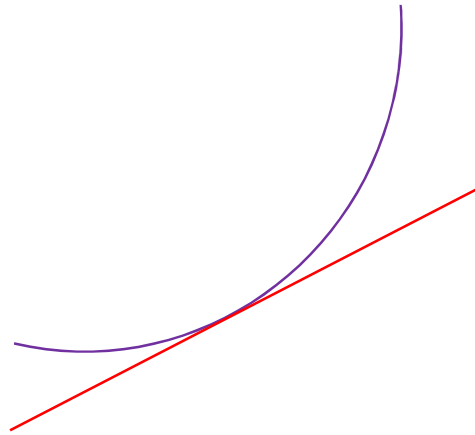


# מתמטיקה ב



גיא סלומון

ספר תרגילים זה הינו פרי שנות ניסיון רבות של המחבר בהוראת חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי באוניברסיטת תל אביב, באוניברסיטה הפתוחה, במכללת שנקר ועוד.

שאלות תלמידים וטעויות נפוצות וחוזרות הולידו את הרצון להאיר את הדרך הנכונה לעומדים בפני קורס חשוב זה.

הספר עוסק במתמטיקה ב' (חדו"א 1) והוא מתאים לתלמידים במוסדות להשכלה גבוהה – אוניברסיטאות או מכללות.

הספר מסודר לפי נושאים ומכיל את כל חומר הלימוד, בהתאם לתוכניות הלימוד השונות. הניסיון מלמד כי לתרגול בקורס זה חשיבות יוצאת דופן, ולכן ספר זה בולט בהיקפו ובמגוון התרגילים המופיעים בו.

לכל התרגילים בספר פתרונות מלאים באתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il) הפתרונות מוגשים בסרטוני פלאש המלווים בהסבר קולי, כך שאתם רואים את התהליכים בצורה מובנית, שיטתית ופשוטה, ממש כפי שנעשה בשיעור פרטי. הפתרון המלא של השאלה מכוון ומוביל לדרך חשיבה נכונה בפתרון בעיות דומות מסוג זה.

לדוגמאות: [www.GooL.co.il/hedva1.html](http://www.GooL.co.il/hedva1.html)

תקוותי היא, שספר זה ישמש מורה-דרך לכם הסטודנטים ויוביל אתכם להצלחה.

גיא סלומון

**GOOL**  
בשביל התירגול

גול זה בול. בשבילך!

## תוכן

5.....	פרק 1 - פונקציה ממשית
7.....	פרק 2 - גבול של פונקציה
11.....	פרק 3 - רציפות ומשפט ערך הביניים
14.....	פרק 4 - גזירות של פונקציה, הגדרת הנגזרת
17.....	פרק 5 - גזירה של פונקציה
20.....	פרק 6 - נגזרות של פונקציות מיוחדות
22.....	פרק 7 - בעיות משיקים (המשמעות הגיאומטרית של הנגזרת)
24.....	פרק 8 - כלל לופיטל
27.....	פרק 9 - תקירת פונקציה
32.....	פרק 10 - תקירת פונקציה - "שאלות מסביב"
34.....	פרק 11 - מקסימום ומינימום מוחלטים של פונקציה
35.....	פרק 12 - בעיות מקסימום ומינימום
45.....	פרק 13 - פתרון משוואות (משפט ערך הביניים, מונוטוניות (משפט רול), ניוטון רפסון)
46.....	פרק 14 - בעיות קצב שינוי
50.....	פרק 15 - משפט לגרנג'
52.....	פרק 16 - טור טיילור/מקלורן
57.....	פרק 17 - סדרות
59.....	פרק 18 - האינטגרל הלא מסויים (אינטגרל מידי)
60.....	פרק 19 - האינטגרל הלא מסויים (הנגזרת כבר בפנים)
61.....	פרק 20 - האינטגרל הלא מסויים (אינטגרציה בחלקים)
62.....	פרק 21 - האינטגרל הלא מסויים (שיטת ההצבה)
63.....	פרק 22 - האינטגרל הלא מסויים (פונקציות רציונליות)
65.....	פרק 23 - האינטגרל הלא מסויים (אינטגרלים טריגונומטריים והצבות טריגונומטריות)
68.....	פרק 24 - האינטגרל המסויים
70.....	פרק 25 - שימושי אינטגרל המסויים (שטח ואורך קשת)
76.....	פרק 26 - שימושי אינטגרל המסויים
78.....	פרק 27 - גזירת האינטגרל
79.....	פרק 28 - אינטגרלים לא אמיתיים (מוכללים)
80.....	נוסחאות - גבולות
81.....	נוסחאות - נגזרות
82.....	נוסחאות - אינטגרלים
83.....	נוסחאות - טריגו
84.....	נוסחאות - אלגברה

- 85.....נוסחאות - טורי מקלורן של פונקציות חשובות.
- 86..... פרק 29 - קיצון תחת אילוץ של פונקציה של שלושה משתנים (כופלי לגרנג') (כופלי לגרנג')
- 88..... פרק 30 - קיצון תחת אילוץ של פונקציה של שני משתנים (כופלי לגרנג')
- 90..... פרק 31 - קיצון של פונקציה בשני משתנים (רמה רגילה)

## פרק 1 - פונקציה ממשית

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

$$y = \frac{4x+1}{x^2+1} \quad (3) \quad y = \frac{1}{x^2-4} \quad (2) \quad y = x^3 - x^2 - 4x + 1 \quad (1)$$

$$y = \sqrt{x-4} \quad (6) \quad y = \frac{x^2}{x^2-x-2} \quad (5) \quad y = \frac{1}{x^3-x} \quad (4)$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{1-|x|}} \quad (9) \quad y = \sqrt[3]{x^2+x-1} \quad (8) \quad y = \sqrt{x^2+x-2} \quad (7)$$

$$y = e^{x^2+x+1} \quad (12) \quad y = \log x + \frac{1}{\log x} \quad (11) \quad y = \ln(x^2+x-2) \quad (10)$$

$$y = \cot(4x) \quad (15) \quad y = \tan(10x) \quad (14) \quad y = \log_x(x+4) \quad (13)$$

$$y = \arccos(x+1) \quad (18) \quad y = \arcsin(x-4) \quad (17) \quad y = \arctan(x+4) \quad (16)$$

(2) נתונות הפונקציות הבאות:  $h(x) = \frac{4}{x}$ ,  $g(x) = x^2$ ,  $f(x) = x-4$

חשב את הפונקציות המורכבות הבאות:

$$h(h(x)) \quad (6) \quad f(f(x)) \quad (5) \quad h(f(x)) \quad (4) \quad f(g(x)) \quad (3) \quad h(g(f(5))) \quad (2) \quad f(g(1)) \quad (1)$$

(3) בתרגילים הבאים הוכח שהפונקציה הנתונה היא חח"ע בתחום הגדרתה ומצא את הפונקציה ההפוכה לה. בנוסף מצא את התמונה של הפונקציה.

$$f(x) = x^2 - 4 \quad (x \geq 0) \quad (4) \quad f(x) = \frac{3x-2}{x-2} \quad (3) \quad f(x) = \frac{x+1}{x} \quad (2) \quad f(x) = \frac{x-1}{3} \quad (1)$$

(4) מצא איזה מבין הפונקציות הבאות הן אי זוגיות ואיזה זוגיות:

$$y = \frac{1}{x} \quad (4) \quad y = 1 \quad (3) \quad y = x^4 + x^{10} \quad (2) \quad y = 4x^3 \quad (1)$$

$$y = \sin x \cdot \cos x \quad (8) \quad y = \ln x + x^2 \quad (7) \quad y = 2^x \quad (6) \quad y = x^2 + \sin^2 x \quad (5)$$

(5) מצא את המחזור של כל אחת מהפונקציות הבאות:

$$y = \sin^2 x \quad (4) \quad y = \tan \frac{x}{3} \quad (3) \quad y = 5 + 3\sin(4x+1) \quad (2) \quad y = 2\sin x \quad (1)$$

(6) רשום כל אחת מהפונקציות הבאות כפונקציה מפוצלת\* ושרטט את גרף הפונקציה.

$$y = \frac{|x|}{x} \quad (4) \quad y = x^2 + 2|x-1| \quad (3) \quad y = 3|x+1| \quad (2) \quad y = |x-2| \quad (1)$$

\* יש הקוראים לפונקציה "מפוצלת", פונקציה "מוטלאת" או פונקציית "תפר" או פונקציה "לפי מקרים".

**פתרונות:**

$$\begin{array}{lllll}
 x \neq 2, -1 \quad (5) & x \neq 0, 1, -1 \quad (4) & x \text{ כל } (3) & x \neq \pm 2 \quad (2) & x \text{ כל } (1) \\
 x < -2 \text{ או } x > 1 \quad (10) & -1 < x < 1 \quad (9) & x \text{ כל } (8) & x \leq -2 \text{ או } x \geq 1 \quad (7) & x \geq 4 \quad (6) \\
 x \neq \frac{\pi}{4} \cdot k \quad (15) & x \neq \frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{10}k \quad (14) & 0 < x \neq 1 \quad (13) & x \text{ כל } (12) & 0 < x \neq 1 \quad (11) \\
 -2 < x < 0 \quad (18) & & & 3 < x < 5 \quad (17) & x \text{ כל } (16)
 \end{array}$$

(2)

$$x \quad (6) \quad x - 8 \quad (5) \quad \frac{4}{x-4} \quad (4) \quad x^2 - 4 \quad (3) \quad 4 \quad (2) \quad -3 \quad (1)$$

(3)

$$y \neq 3, \quad f^{-1}(x) = \frac{2x-2}{x-3} \quad (3) \quad y \neq 1, \quad f^{-1}(x) = \frac{1}{x-1} \quad (2) \quad y \text{ כל}, \quad f^{-1}(x) = 3x+1 \quad (1)$$

$$y \geq -4, \quad f^{-1}(x) = \sqrt{x+4} \quad (4)$$

(4)

זוגיות - 2,3,5,8 אי זוגיות - 1,4 כלליות - 6,7

(5)

$$\pi \quad (4) \quad 3\pi \quad (3) \quad \frac{\pi}{2} \quad (2) \quad 2\pi \quad (1)$$

(6)

$$y = \begin{cases} 3x+3 & x \geq -1 \\ -3x-3 & x < -1 \end{cases} \quad (2) \quad y = \begin{cases} x-2 & x \geq 2 \\ 2-x & x < 2 \end{cases} \quad (1)$$

$$y = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \quad (4) \quad y = \begin{cases} x^2 + 2x - 2 & x \geq 1 \\ x^2 - 2x + 2 & x < 1 \end{cases} \quad (3)$$

## פרק 2 - גבול של פונקציה

(1) חשב את הגבולות הבאים (הצבה) :

$$\lim_{x \rightarrow 100} 20 \quad (4) \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x+3} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow 10} \frac{x+1}{x+2} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 4} x^2 + x + 1 \quad (1)$$

(2) חשב את הגבולות הבאים (צמצום/פירוק לגורמים) :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - x}{x-1} \quad (4) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^7 - x}{x-1} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^2 - 50}{2x^2 + 3x - 35} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9} \quad (1)$$

(3) חשב את הגבולות הבאים (כפל בצמוד) :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + x + 2} - 2}{x^2 - 1} \quad (4) \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3 - \sqrt{x+6}}{2x-6} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt[3]{x}}{1-x} \quad (7) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2-\sqrt{3x+1}}{1-\sqrt{2x-1}} \quad (6) \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+5}}{x-4} \quad (5)$$

(4) חשב את הגבולות הבאים (היעזר בגבול הטריגונומטרי  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ) :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x}{\sin 2x} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(4x)} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{4x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{\cos x}}{x} \quad (6) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} \quad (5) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2} \quad (9) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x - \sin 3x}{x^3} \quad (8) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4} \quad (7)$$

(5) חשב את הגבולות הבאים (פונקציה השואפת לאינסוף) :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{(x-2)(x-5)} \quad (4) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2}{(2-x)^2} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)^2}{x-2} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 4}{x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}} \quad (8) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} ((\ln x)^2 + 2 \ln x - 3) \quad (7) \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} -\frac{1}{2} \ln(2-x) \quad (6) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x \cdot \cot x \quad (12) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} \quad (11) \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} \quad (10) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} \quad (9)$$

(6) חשב את הגבולות הבאים ( $x$  שואף לאינסוף) :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 2}{x^2 + 1000x} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x + e^x \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (e^{-x})^{\ln x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 - 5x + 6}{2x + 10} - \frac{x}{2} \right) \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^5 + 10x} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^3 + 10x} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^6 - 5x}}{x^3 - 2x^2 + 1} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16^x + 4^{x+1}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (12)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{3x-3}}{\sqrt{4x+1} - \sqrt{5x-1}} \quad (11)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^4 + 2x^2 + 6 + 27x^6}}{\sqrt{3x^3 + 10x + 4x^4}} \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 \cdot 9^x + 3^{x+1}}{81^{0.5x} + 3^{x+3}} \quad (15)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 9^x + 3^{x+1}}{81^{0.5x} + 3^{x+3}} \quad (14)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{16^x + 4^{x+1}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (13)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^4 + 10x}} \quad (18)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left( \frac{3x^3 - 5x - 1}{x^3 - 2x^2 + 1} \right) \quad (17)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4x^2 + 2}{x^2 + 1000x}} \quad (16)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 5x} - x) \quad (21)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[5]{\frac{ax+1}{bx+2}} \quad (20)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin \left( \frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^5 + 10x} \right) \quad (19)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} + x) \quad (24)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x) \quad (23)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + kx} - x) \quad (22)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + ax} - \sqrt{x^2 + bx}) \quad (26)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^4 + x^2 + 1} - x^2) \quad (25)$$

(7) חשב את הגבולות הבאים (העזר בגבול של אוילר  $e = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}}$ ) :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+2}{x} \right)^x \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x^2} \right)^x \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{2x} \right)^x \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+3}{2x-3} \right)^x \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{x^2} \right)^{x^2-1} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \tan \frac{1}{x} \right)^x \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 4x + 1}{x^2 + 2x + 2} \right)^{10x} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + x + 4} \right)^{4x^2} \quad (7)$$



(8) חשב את הגבולות הבאים (ע"י שימוש בכלל הסנדוויץ'):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + \sin x}{4x + \cos x} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos(2x+1)}{x} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \cos(\ln x^2) \quad (6) \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad (5) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + x + \sin 2x}{x^2 + \cos 3x} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} [x] \quad (9) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{2^x + 3^x + 4^x} \quad (8) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + \arctan(2x-3)}{4x + \arctan(x - \ln x)} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} [x] \quad (10)$$

(9) חשב את הגבול  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  של הפונקציות הבאות (גבול של פונקציה מפוצלת):

$$(a=1) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 2}{x-1} & x > 1 \\ \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} & x < 1 \end{cases} \quad (2) \quad (a=0) f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 4x}{x} & x > 0 \\ 4 + e^{\frac{1}{x}} & x < 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$(a=\infty) f(x) = \frac{|x|}{x} \quad (4) \quad (a=0) f(x) = \frac{|x|}{x} \quad (3)$$

$$(a=-\infty) f(x) = \frac{|x|}{x} \quad (5)$$

**הערה חשובה מאוד!**

במרבית קורסי החדו"א לומדים בהמשך את כלל לופיטל לחישוב גבולות. בעזרת כלל זה ניתן לחשב ללא מאמץ את הגבולות המופיעים בשאלות 2, 3 ו-4.

**פתרונות:**

									<b>(1)</b>
						40 (4	2 (3	$\frac{11}{12}$ (2	21 (1
									<b>(2)</b>
						$n-1$ (4	6 (3	$\frac{10}{8.5}$ (2	$\frac{5}{6}$ (1
									<b>(3)</b>
		$\frac{1}{3}$ (7	$\frac{3}{4}$ (6	$\frac{1}{6}$ (5	$\frac{3}{8}$ (4	$\frac{-1}{12}$ (3	4 (2	$\frac{1}{2}$ (1	<b>(4)</b>
1 (9	4 (8	$\frac{1}{8}$ (7	$\frac{1}{2}$ (6	$\frac{1}{2}$ (5	$\frac{1}{2}$ (4	$\frac{1}{2}$ (3	$\frac{3}{4}$ (2	$\frac{3}{4}$ (1	<b>(5)</b>
0 (9	$\phi$ (8	$\infty$ (7	$\infty$ (6	$-\infty$ (5	$\phi$ (4	$-\infty$ (3	$\phi$ (2	$\phi$ (1	<b>(6)</b>
						$-\infty$ (12	$\phi$ (11	1 (10	<b>(7)</b>
-3 (9	-1 (8	1 (7	-5 (6	0 (5	$-\infty$ (4	4 (3	$-\frac{\pi}{2}$ (2	0 (1	<b>(8)</b>
$e^{\frac{1}{3}}$ (18	$\ln 3$ (17	2 (16	$\frac{1}{9}$ (15	4 (14	0 (13	0.25 (12	$\frac{1-\sqrt{3}}{2-\sqrt{5}}$ (11	1.5 (10	<b>(9)</b>
	$\frac{a-b}{2}$ (26	1/2 (25	-1/2 (24	1/2 (23	$k/2$ (22	2.5 (21	(**) (20	0 (19	<b>(10)</b>
$e$ (9	$e^{30}$ (8	$e^{-12}$ (7	$e$ (6	$e^3$ (5	$e^{-1}$ (4	$e^2$ (3	1 (2	$e^{\frac{1}{2}}$ (1	<b>(11)</b>
1 (9	4 (8	0.75 (7	0 (6	0 (5	3 (4	0.75 (3	0 (2	0 (1	<b>(12)</b>
								0 (10	<b>(13)</b>
								4 (1	<b>(14)</b>

(\*\*) בשאלה 6 תרגיל 20 יש להפריד לשלושה מקרים :

$$\lim = \sqrt[5]{\frac{a}{b}} \Leftarrow b \neq 0 \text{ (I)}$$

$$\lim = \infty \Leftarrow a > 0, b = 0 \text{ (II)}$$

$$\lim = -\infty \Leftarrow a < 0, b = 0 \text{ (III)}$$

### פרק 3 - רציפות ומשפט ערך הביניים

#### רציפות

(1) בדוק את רציפות הפונקציות הבאות ב"נקודת התפר" שלהן: (בסעיפים 3 ו-4 שרטט את גרף הפונקציה).

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x > 0 \\ 2 & x = 0 \\ 1 + e^{\frac{1}{x}} & x < 0 \end{cases} \quad (2) \qquad f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 4x}{x} & x > 0 \\ 4 + e^{\frac{1}{x}} & x < 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 1 \\ x^2 & x < 1 \end{cases} \quad (4) \qquad f(x) = \begin{cases} x+1 & x \leq 2 \\ 5-x & x > 2 \end{cases} \quad (3)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \leq 1 \\ |x-2| & 1 < x < 2 \\ 1 & x = 2 \\ x-2 & x > 2 \end{cases} \quad (6) \qquad f(x) = \begin{cases} \sin x & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x < 1 \\ 2-x & 1 \leq x < 2 \\ x-3 & x \geq 2 \end{cases} \quad (5)$$

\* נקודת התפר היא הנקודה בה נוסחת הפונקציה משתנה. למשל, נקודת התפר בתרגיל 1 היא  $x = 0$ .

(2) מה צריך להיות הערך של הקבוע  $k$  על מנת שהפונקציות הבאות תהינה רציפות לכל  $x$ :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x - 3}{x-1} & x \neq 1 \\ k & x = 1 \end{cases} \quad (2) \qquad f(x) = \begin{cases} kx^2 + x - 2 & x \leq 2 \\ 5kx - 6 & x > 2 \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x - k & x \leq 0 \\ x^{2x} & x > 0 \end{cases} \quad (4) \qquad f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x-2} & x \neq 2 \\ k & x = 2 \end{cases} \quad (3)$$

הערה: על סעיף 4 תוכל לענות רק אחרי שתלמד את כלל לופיטל.

(3) מה צריך להיות הערך של הקבועים  $a$  ו- $b$  על מנת שהפונקציות הבאות תהינה רציפות בתחום הגדרתן :

$$f(x) = \begin{cases} a\sqrt[3]{x} + x^2 & x < -1 \\ bx^2 + x - 1 & -1 \leq x \leq 1 \quad (2) \\ 4 \frac{\sqrt{x-1+a} - \sqrt{a}}{\sqrt{a}(x-1)} & x > 1 \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} ax + b & x \leq 0 \\ \frac{\sin x}{2x} & 0 < x < \pi \quad (1) \\ a \cos x & x \geq \pi \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{1-x}}} & x < 1 \\ ax^2 + b & 1 \leq x \leq 2 \quad (4) \\ (x-1)^{\frac{1}{x-2}} & x > 2 \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^{1-x}} & x > 1 \\ (x-1)\ln(x+1) + b & 0 \leq x \leq 1 \\ a \frac{\frac{1}{2^x} - 2}{\frac{1}{2^x} + 4} & x < 0 \quad (3) \end{cases}$$

**הערה: על סעיפים 3 ו-4 תוכל לענות רק אחרי שתלמד את כלל לופיטל.**

(4) עבור כל אחת מהפונקציות בשאלה (1) רשום עבור כל נקודת אי רציפות מאיזה סוג היא. (5) הוכח או הפרך:

1. סכום שתי פונקציות לא רציפות הוא פונקציה לא רציפה.
  2. הפרש שתי פונקציות לא רציפות הוא פונקציה לא רציפה.
  3. מכפלת שתי פונקציות לא רציפות היא פונקציה לא רציפה.
  4. מנתן של שתי פונקציות לא רציפות היא פונקציה לא רציפה.
- (6) ידוע ש- $f$  רציפה ו- $g$  לא רציפה. האם  $f + g$  רציפה? הוכח את טענתך.

### משפט ערך הביניים (של קושי)

(7) צטט את משפט ערך הביניים של קושי והסבר אותו גרפית. (8) הוכח שלמשוואות הבאות יש לפחות פתרון אחד:

$$x - 0.25 \sin x = 7 \quad (3) \quad x^2 = -\ln x \quad (2) \quad x^3 + 4x - 1 = 0 \quad (1)$$

(9) הוכח שלמשוואה  $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$  יש לפחות פתרון אחד. (10) הוכח שלמשוואות הבאות יש לפחות שני פתרונות:

$$4x^3 + 5x - \frac{1}{x} = 0 \quad (2) \quad e^x - 5x = 0 \quad (1)$$

(11) תהי  $f$  פונקציה רציפה לכל  $x$  המקיימת:  $f(0) = 1$ ,  $f(1) = 2$ . הוכח שלמשוואה  $f(x) + \sin x = 4x$  יש לפחות פתרון אחד.

(12) מצא קטע שאורכו אינו עולה על יחידה אחת בו למשוואה  $x^2 = 10 - \frac{1}{x}$  יש פתרון.

$$(13) \text{ נגדיר } f(x) = x^2 + \frac{1}{x-1}$$

א. חשב  $f(0)$ ,  $f(2)$ .

ב. האם ניתן להסיק לפי משפט ערך הביניים שלמשוואה  $x^2 + \frac{1}{x-1} = 0$  יש פתרון בקטע  $(0, 2)$ .

**פתרונות:**

- (1) (1) לא רציפה. (2) לא רציפה. (3) רציפה. (4) רציפה. (5) רציפה בנקי:  $x=0,1$ , לא רציפה בנקודה  $x=2$ . (6) רציפה בנקי  $x=1$ . לא רציפה בנקי  $x=2$ . (2) (1) (2)  $k=1$ . (2)  $k=4$ .
- (3) (3)  $k=\frac{2}{3}$ . (4)  $k=-1$ . (1) (3)  $a=0, b=\frac{1}{2}$ . (2)  $a=1, b=2$  או  $a=2, b=1$ .
- (3) (3)  $a=-2e^{-1}, b=e^{-1}$ . (4)  $a=e/3, b=-e/3$ . (1) (4) סליקה. (2) סליקה. (5) מסוג ראשון. (6) סליקה. (12)  $[0.1,1]$ . (13) א.  $f(0)=-1, f(2)=5$ . ב. לא.

## פרק 4 - גזירות של פונקציה, הגדרת הנגזרת

- (1) א. תאר שתי דרכים שונות לבדיקת גזירות של פונקציה מפוצלת בנקודת הפיצול (תפר) שלה. השתמש בפונקציה מסעיף ב.3. שלהלן כדי להדגים שתי שיטות אלה. בנוסף, הסבר מתי עליך להשתמש בכל אחת מהשיטות שתיארת.
- ב. בדוק גזירות הפונקציות הבאות בתחום הגדרתן בכל דרך שתבחר. בנוסף רשום נוסחה עבור הנגזרת של כל אחת מהפונקציות.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x & x \geq 2 \\ x^3 - 14 & x < 2 \end{cases} \quad (2) \quad f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x & x \geq 2 \\ x^3 - 14 & x < 2 \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x) = \begin{cases} \ln(1+2x) & -0.5 < x < 0 \\ x^2 + 2x & x \geq 0 \end{cases} \quad (4) \quad f(x) = \begin{cases} x^2 + 8x & x \geq 2 \\ x^3 + 12 & x < 2 \end{cases} \quad (3)$$

$$f(x) = 3x^2 + x|x| + 1 \quad (6) \quad f(x) = 2 + 4|x - 1| \quad (5)$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad (8) \quad f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad (7)$$

(2)

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x+1} & x \geq -1 \\ \frac{1}{x} + a & x < -1 \end{cases} \quad \text{נתונה הפונקציה}$$

- א. עבור איזה ערך של הקבוע  $a$  הפונקציה רציפה בנקודה  $x = -1$ .
- ב. עבור ערך ה- $a$  שקיבלת בסעיף א בדוק **על פי הגדרת הנגזרת** האם הפונקציה הנתונה גזירה בנקודה  $x = -1$ .

(3)

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x-1} & x \geq 0 \\ -(x+1)^2 & x < 0 \end{cases} \quad \text{נתונה הפונקציה}$$

- א. האם הפונקציה רציפה?
- ב. בדוק **על פי הגדרת הנגזרת** האם הפונקציה הנתונה גזירה בנקודה  $x = 1$ .

- (4) עבור איזה ערכים של הקבועים  $a$  ו- $b$  יהיו הפונקציות הבאות גזירות בנקודת התפר. עבור ערכים אלה, רשום נוסחה עבור הנגזרת.

$$f(x) = \begin{cases} e^x & 0 < x \leq 1 \\ ax + b & x > 1 \end{cases} \quad (ב) \quad f(x) = \begin{cases} \ln^3 x & 0 < x \leq e \\ ax + b & x > e \end{cases} \quad (א)$$

(5) חשב **על פי הגדרת הנגזרת** את נגזרות הפונקציות הבאות:

$$f(x) = \sin 4x \quad (3) \quad f(x) = \frac{1}{x+1} \quad (2) \quad f(x) = x^2 + 4x + 1 \quad (1)$$

$$f(x) = \sqrt{x+10} \quad (6) \quad f(x) = \ln x \quad (5) \quad f(x) = e^x \quad (4)$$

\* בתרגיל זה אסור להשתמש בכלל לופיטל.

(6) חשב את  $f'(0)$  עבור כל אחת מהפונקציות הבאות:

$$f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-44) \quad (1)$$

$$f(x) = 2x(|x|+1)\sqrt{1+x+x^2} \quad (2)$$

$$f(x) = \frac{\sin x(x-4)^{10}(1+\tan x)^4 \cos(x+\sin x)}{(x-1)^2(x-10)^{10}} \quad (3)$$

$$\left( z(0) = 1, \lim_{x \rightarrow 0} z(x) = 4 : \text{נתון} \right) f(x) = x \cdot z(x) \quad (4)$$

$$f(x) = |x^4 - x^3 + \sin(10x) - 1| \quad (5)$$

- (7) בדוק האם הפונקציה משאלה (1) סעיף 4 גזירה פעמיים בנקודה  $x=0$ .
- (8) הוכח או הפרך (אם הטענה נכונה, הוכח אותה. אם לא הבא דוגמה נגדית לטענה):
- א. אם  $h$  גזירה ב- $x_0$ , ו- $g$  אינה גזירה ב- $x_0$  אז  $f = g + h$  אינה גזירה ב- $x_0$ .
- ב. אם  $h$  אינה גזירה ב- $x_0$ , ו- $g$  אינה גזירה ב- $x_0$  אז  $f = g + h$  אינה גזירה ב- $x_0$ .
- ג. אם  $h$  אינה גזירה ב- $x_0$ , ו- $g$  אינה גזירה ב- $x_0$  אז  $f = g \cdot h$  אינה גזירה ב- $x_0$ .
- ד. אם  $h$  גזירה ב- $x_0$ , ו- $g$  אינה גזירה ב- $x_0$  אז  $f = g \cdot h$  אינה גזירה ב- $x_0$ .

**פתרונות:**

$$f'(x) = \begin{cases} 2x-5 & x > 2 \\ 3x^2 & x < 2 \end{cases} \quad (2) \quad f'(x) = \begin{cases} 2x-4 & x > 2 \\ 3x^2 & x < 2 \end{cases} \quad (1)$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{1+2x} & -0.5 < x < 0 \\ 2x+2 & x \geq 0 \end{cases} \quad (4) \quad f'(x) = \begin{cases} 2x+8 & x \geq 2 \\ 3x^2 & x < 2 \end{cases} \quad (3)$$

$$f'(x) = \begin{cases} 8x & x \geq 0 \\ 4x & x < 0 \end{cases} \quad (6) \quad f'(x) = \begin{cases} 4 & x > 1 \\ -4 & x < 1 \end{cases} \quad (5)$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad (8) \quad f'(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad (7)$$

לתשומת לבך! בתחומים בהם קיימת נוסחה לנגזרת, הפונקציה גזירה. בנקודות בהן הנגזרת לא קיימת הפונקציה לא גזירה. למשל, בסעיף 1 הפונקציה גזירה עבור  $x \neq 2$ .

(1) (2)  $a = 1$  לא גזירה.

(3) (1) רציפה (2) לא גזירה.

(4) (א)  $a = 3/e, b = -2$  (ב)  $a = e, b = 0$ .

(5)

$$f'(x) = 4 \cos(4x) \quad (3) \quad f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} \quad (2) \quad f'(x) = 2x+4 \quad (1)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+10}} \quad (6) \quad f'(x) = \frac{1}{x} \quad (5) \quad f'(x) = e^x \quad (4)$$

$$-10 \quad (5) \quad 4 \quad (4) \quad (0.4)^{10} \quad (3) \quad 2 \quad (2) \quad 44! \quad (1) \quad (6)$$

(7) לא גזירה פעמיים.



## פרק 5 - גזירה של פונקציה

(1) גזור פעמיים את הפונקציות הבאות (בסעיפים 29-27 גזור פעם אחת):

$$f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)^2} \quad (3) \quad f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{2x + 10} \quad (2) \quad f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{2x} \quad (1)$$

$$f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 \quad (6) \quad f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2} \quad (5) \quad f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4} \quad (4)$$

$$f(x) = x \cdot \ln x \quad (9) \quad f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \quad (8) \quad f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad (7)$$

$$f(x) = \ln^2 x + 2 \ln x - 3 \quad (12) \quad f(x) = \ln \sqrt{\frac{1}{2-x}} \quad (11) \quad f(x) = x^2 \cdot \ln x \quad (10)$$

$$f(x) = (x+2) \cdot e^{\frac{1}{x}} \quad (15) \quad f(x) = e^{\frac{1}{x}} \quad (14) \quad f(x) = \ln^2 x + \frac{1}{\ln^2 x} \quad (13)$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1} \quad (18) \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2} \quad (17) \quad f(x) = x \cdot e^{-2x^2} \quad (16)$$

$$f(x) = \cos(x^4) \quad (21) \quad f(x) = \sin(x^3) \quad (20) \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2} (1-x) \quad (19)$$

$$f(x) = \ln(\cos x^2) \quad (24) \quad f(x) = \tan(x^2) \quad (23) \quad f(x) = \sin^3 x \quad (22)$$

$$f(x) = (x+1)^{\sin x} \quad (27) \quad f(x) = \arctan(x^2) \quad (26) \quad f(x) = \arcsin(2x+3) \quad (25)$$

$$f(x) = (\cos x)^{\ln x} \quad (29) \quad f(x) = (\sin x)^x \quad (28)$$

**פתרונות:**

$$f'(x) = \frac{2x^2 + 20x - 62}{(2x + 10)^2}, \quad f''(x) = \frac{448}{(2x + 10)^3} \quad (2) \quad (1)$$

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2 - 12)}{(x^2 - 4)^2}, \quad f''(x) = \frac{4x \cdot (2x^2 + 24)}{(x^2 - 4)^3} \quad (4) \quad (3)$$

$$f'(x) = -\frac{6(x+1)^2}{(x-1)^4}, \quad f''(x) = 12 \frac{(x+1)(x+3)}{(x-1)^5} \quad (6) \quad (5)$$

$$f'(x) = \frac{2 - \ln x}{2x^{1.5}}, \quad f''(x) = \frac{3 \ln x - 8}{4x^{2.5}} \quad (10) \quad (7)$$

$$f'(x) = x(2 \ln x + 1), \quad f''(x) = 2 \ln x + 3 \quad (12) \quad (9)$$

$$f'(x) = \frac{2}{x}(\ln x + 1), \quad f''(x) = \frac{-2 \ln x}{x^2} \quad (13) \quad (11)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2(2-x)}, \quad f''(x) = \frac{1}{(4-2x)^2} \quad (13) \quad (10)$$

$$f'(x) = \frac{2}{x} \left[ \frac{(\ln x)^4 - 1}{(\ln x)^3} \right], \quad f''(x) = -\frac{2}{x^2} \left\{ \frac{(\ln x)^5 - (\ln x)^4 - (\ln x) - 3}{(\ln x)^4} \right\} \quad (15) \quad (14)$$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \left( \frac{x^2 - x - 2}{x^2} \right), \quad f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \left( \frac{5x + 2}{x^4} \right) \quad f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \left( -\frac{1}{x^2} \right), \quad f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \left( \frac{1 + 2x}{x^4} \right) \quad (16)$$

$$f'(x) = e^{-2x^2} (1 - 4x^2), \quad f''(x) = -4xe^{-2x^2} (3 - 4x^2) \quad (17)$$

$$f'(x) = \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9 \cdot \sqrt[3]{x^4}} \quad (18)$$

$$f'(x) = \frac{2x}{3 \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}}, \quad f''(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{-\frac{1}{3}x^2 - 1}{(x^2 - 1)^{5/3}} \quad (19)$$

$$f'(x) = \frac{2 - 5x}{3 \sqrt[3]{x}}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9} \cdot \frac{1 + 5x}{\sqrt[3]{x^4}} \quad (20)$$

$$f'(x) = \cos(x^3) \cdot 3x^2, \quad f''(x) = -9x^4 \sin(x^3) + 6x \cdot \cos(x^3) \quad (21)$$

$$f'(x) = -\sin(x^4) \cdot 4x^3, \quad f''(x) = -16x^6 \cos(x^4) - 12x^2 \cdot \sin(x^4)$$

$$f'(x) = 3 \sin^2 x \cdot \cos x, \quad f''(x) = 6 \sin x \cos^2 x - 3 \sin^3 x \quad (22)$$

$$f'(x) = \frac{2x}{\cos^2(x^2)}, \quad f''(x) = \frac{2 \cdot \cos^2(x^2) - 8x^2 \cos(x^2) \sin(x^2)}{\cos^4(x^2)} \quad (23)$$

$$f'(x) = \tan(x^2) \cdot (-2x), \quad f''(x) = \frac{-4x^2}{\cos^2(x^2)} - 2 \tan(x^2) \quad (24)$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{-x^2 - 3x - 2}}, \quad f''(x) = \frac{2x + 3}{2(-x^2 - 3x - 2)^{3/2}} \quad (25)$$

$$f'(x) = x^{\sin x} \left( \cos x \cdot \ln(x+1) + \frac{\sin x}{x+1} \right) \quad (27)$$

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^4}, \quad f''(x) = \frac{2-6x^4}{(1+x^4)^2} \quad (26)$$

$$f'(x) = (\cos x)^{\ln x} \cdot \left( \frac{\ln(\cos x)}{x} - \tan x \cdot \ln x \right) \quad (29)$$

$$f'(x) = (\sin x)^x (\ln(\sin x) + \cot x \cdot x) \quad (28)$$

## פרק 6 - נגזרות של פונקציות מיוחדות

### נגזרת הפונקציה ההפוכה

(1) הוכח, בעזרת כלל הנגזרת של הפונקציה ההפוכה, את הנוסחאות הבאות:

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad (3) \quad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (2) \quad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (1)$$

### נגזרות מסדרים גבוהים, נוסחת לייבניץ

(2) חשב את הנגזרת ה- $n$ ,  $f^{(n)}(x)$ , של הפונקציות הבאות:

$$y = \frac{x^4}{x^2-1} \quad (4) \quad y = \frac{x}{(x^2-1)(x-2)} \quad (3) \quad y = \frac{2x+3}{x^2-3x+2} \quad (2) \quad y = \frac{1}{x+a} \quad (1)$$

(3) חשב את הנגזרת העשירית,  $y^{(10)}$ , של הפונקציות הבאות:

$$y = x^3 \sin 5x \quad (2) \quad y = x^3 e^x \quad (1)$$

### נגזרת של פונקציה סתומה

(4) גזור את הפונקציות הסתומות הבאות ומצא את  $y'$ :

$$xy = \sinh \frac{y}{x} \quad (3) \quad 4 \ln x + 10 \ln y = y^2 \quad (2) \quad x^2 + y^5 - y = 1 \quad (1)$$

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{xy} \quad (6) \quad x^y - y^x = 1 \quad (5) \quad x^y - xy = 10 \quad (4)$$

(5) נתונה פונקציה סתומה  $xy - y^3 + x^2 - x = 0$ . מצא את ערך  $y$  בנקודה  $y = 1$ .

### נגזרת של פונקציה הנתונה בצורה פרמטרית

(6) חשב את הנגזרת הראשונה והשנייה של הפונקציות הבאות הנתונות בצורה פרמטרית.

$$\begin{cases} x(t) = t \cos t \\ y(t) = t^2 - 1 \end{cases} \quad (2) \quad \begin{cases} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = t \cos t \end{cases} \quad (1)$$

### נגזרת של פונקציה מן הצורה $h(x)^{g(x)}$

(7) גזור את הפונקציות הבאות:

$$f(x) = (\cos x)^{\ln x} \quad (3) \quad f(x) = (x+1)^{\sin x} \quad (2) \quad f(x) = (\sin x)^x \quad (1)$$

**פתרונות:**

(2)

$$y^{(n)} = (-1)^n n! (x+a)^{-n-1} \quad (1)$$

$$y^{(n)} = (-1)^n n! \left( -5(x-1)^{-n-1} + 7(x-2)^{-n-1} \right) \quad (2)$$

$$y^{(n)} = (-1)^n n! \left( -\frac{1}{2}(x-1)^{-n-1} - \frac{1}{6}(x+1)^{-n-1} + \frac{2}{3}(x-2)^{-n-1} \right) \quad (3)$$

$$y' = 2x - \frac{1}{2} \left( (x-1)^{-2} - (x+1)^{-2} \right) \quad (4)$$

$$y'' = 2 + \left( (x-1)^{-3} - (x+1)^{-3} \right)$$

$$y^{(n)} = \frac{1}{2} (-1)^n n! \left( (x-1)^{-n-1} - (x+1)^{-n-1} \right) \quad (n > 2)$$

(3)

$$(e^x \cdot x^3)^{(10)} = e^x [x^3 + 103x^2 + 456x + 120 \cdot 6] \quad (1)$$

$$(\sin 5x \cdot x^3)^{(10)} = -5^{10} x^3 \sin 5x + 6 \cdot 5^{10} x^2 \cos 5x + 54 \cdot 5^9 x \sin 5x - 24 \cdot 5^9 \cos 5x \quad (2)$$

(4)

$$y' = \frac{-y(x^2 + \cosh \frac{y}{x})}{x(x^2 - \cosh \frac{y}{x})} \quad (3) \quad y' = \frac{-4y}{x(10-2y^2)} \quad (2) \quad y' = \frac{2x}{1-5y^4} \quad (1)$$

$$y' = \frac{y - \sqrt{y}}{\sqrt{x} - x} \quad (6) \quad y' = \frac{y^x \ln y - x^{y-1} y}{x^y \ln x - y^{x-1} x} \quad (5) \quad y' = \frac{y(1-x^{y-1})}{x^y \ln x - x} \quad (4)$$

$$-\frac{1}{8}, -1 \quad (5)$$

(6)

$$y'(x) = \frac{\cos t - t \sin t}{1 - \cos t} \quad (1)$$

$$y''(x) = \frac{(-2 \sin t - t \cos t)(1 - \cos t) - \sin t (\cos t - t \sin t)}{(1 - \cos t)^3}$$

$$y'(x) = \frac{2t}{\cos t - t \sin t} \quad (2)$$

$$y''(x) = \frac{2(\cos t - t \sin t) - 2t(-2 \sin t - t \cos t)}{(\cos t - t \sin t)^3}$$

(7) ראה פתרון שאלות 37-39 בפרק 6.

**פרק 7 - בעיות משיקים (המשמעות הגיאומטרית של הנגזרת)**

- (1) הישר  $y = x + b$  משיק לגרף הפונקציה  $f(x) = e^x$ . מצא את  $b$  ואת נקודת ההשקה.
- (2) הישר  $y = 4x + b$  משיק לגרף הפונקציה  $f(x) = \frac{2}{x^2} + 3$ . מצא את  $b$  ואת נקודת ההשקה.
- (3) הישר  $y = 3x$  משיק לגרף הפונקציה  $f(x) = x\sqrt{x} + b$ . מצא את  $b$  ואת נקודת ההשקה.
- (4) הישר  $y = ax + \frac{1}{2}$  משיק לגרף הפונקציה  $g(x) = \frac{2}{x+c}$  בנקודה  $x = 0$ . מצא את  $a$  ו- $c$ .
- (5) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה  $f(x) = \ln x$  בנקודה  $x = e$ .
- (6) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה  $f(x) = x^3 + 1$  בנקודה  $x = 0$ .
- (7) מצא את משוואת המשיק למעגל  $x^2 + y^2 = 25$  בנקודה  $(3, 4)$ .
- (8) הפונקציות  $y = \frac{1}{x}$  ו- $y = -\frac{1}{2}x^2 + k$  משיקות זו לזו. מצא את  $k$  ואת נקודת ההשקה.
- (9) מצא את נקודת ההשקה ואת משוואת המשיק לגרף העקומה העובר דרך הנקודה הנתונה.  
 א)  $(2, -3)$   $y = x^2 - 2x + 1$     ב)  $(-3, 1)$   $y = \sqrt{x}$
- (10) מצא את משוואת המשיקים המשותפים לפונקציות הבאות:  
 $y = x^2$  ו- $y = -\frac{1}{4}x^2 - 5$
- (11) מצא את הזווית בין הפונקציות  $y = f(x) = x^2$  ו- $y = g(x) = \frac{1}{x}$ .
- (12) מצא את הזווית בין המעגל  $x^2 + y^2 = 8$  והפרבולה  $y^2 = 2x$ .
- (13) הוכח שהאליפסה  $x^2 + 2y^2 = 8$  וההיפרבולה  $x^2 - y^2 = 2$  נחתכות בזווית ישרה.

**פתרונות:**

- (1) נקודת ההשקה היא  $(0,1)$  ומשוואת המשיק היא  $y = x + 1$ .
- (2) נקודת ההשקה היא  $(-1,5)$  ומשוואת המשיק היא  $y = 4x + 9$ .
- (3) נקודת ההשקה היא  $(4,12)$  ו-  $b = 4$ .
- (4) נקודת ההשקה היא  $(0, \frac{1}{2})$  ומשוואת המשיק היא  $y = -\frac{1}{8}x + \frac{1}{2}$ .
- (5) משוואת המשיק היא  $y = \frac{1}{e}x$ .
- (6) משוואת המשיק היא  $y = 1$ .
- (7) משוואת המשיק היא  $y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}$ .
- (8) נקודת ההשקה  $(1,1)$ ,  $k = 1.5$ .
- (9) א)  $(0,1)$ ,  $y = -2x + 1$ ,  $(4,9)$ ,  $y = 6x - 15$ .
- ב) המשיק:  $(9,3)$ ,  $y = \frac{1}{6}x + \frac{3}{2}$ .
- (10)  $y = 2x - 1$ ,  $y = -2x - 1$
- (11)  $71.57^\circ$
- (12)  $71.56^\circ$

**פרק 8 - כלל לופיטל**

(1) חשב את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - x}{x-1} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^2 - 50}{2x^2 + 3x - 35} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 + 7} - 4}{\sqrt{x} - 2 - 1} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+5}}{x-4} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1} - 2} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 - \frac{3}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x^2 - 1} - \sqrt{x}}{x-1} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x - x^2 - 2x - 2}{2x^3} \quad (12)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} \quad (11)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} \quad (a, b > 0) \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^2(x+1) + x}{x} \quad (15)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)}{\frac{1}{x^2}} \quad (14)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{x^2 - 2x + 1} \quad (13)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{\sin(bx)} \quad (18)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax^2)}{bx^2} \quad (17)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} \quad (16)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{\cos x}}{x} \quad (21)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} \quad (20)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \quad (19)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - \sin(x^2)}{x^4} \quad (24)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3} \quad (23)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4} \quad (22)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \tanh x \quad (27)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x^2 + 3x)}{\arcsin(x^2 - 4x)} \quad (26)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x^2)}{x^4} \quad (25)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{2x^2 + x + 3} \quad (30)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cosh x - 2}{1 - \cos 2x} \quad (29)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sinh x} \quad (28)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^2 + 2 \ln x - 3}{x} \quad (33)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x + x + 1}{e^x} \quad (32)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x} \quad (31)$$



$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot e^x \quad (36)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} \quad (35)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\sin x)}{\ln(\tan x)} \quad (34)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \tan x \cdot \ln x \quad (39)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x} \quad (38)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \ln x \quad (37)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} (x^2 - 9) \cdot \ln(x - 3) \quad (42)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x \quad (41)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) \cot x \quad (40)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) \quad (45)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \left[ \sqrt{1 + \frac{5}{x}} - 1 \right] \quad (44)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \ln \left( \frac{x+3}{x-3} \right) \quad (43)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - x \quad (48)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} [\ln(3x) - \ln(\sin 5x)] \quad (47)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) \quad (46)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (ax)^x \quad (a > 0) \quad (51)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{x-1}} \quad (50)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} + x \quad (49)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x} \quad (54)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right)^{x^2} \quad (53)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (2x - 4)^{x-2} \quad (52)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x^2)^{\frac{1}{x^4}} \quad (57)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\tan x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} \quad (56)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \tan 3x)^{\frac{1}{x}} \quad (55)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x+1)^{\cot x} \quad (60)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\tan x} \quad (59)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{\tan x} \quad (58)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} \quad (63)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + x^2)^{\cot^2 x} \quad (62)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x + \sin x)^{\tan x} \quad (61)$$

(2) כל אחד מהגבולות הבאים הוא מן הסוג  $\left[ \frac{\infty}{\infty} \right]$ . הראה זאת והסבר מדוע למרות כך, כלל

לופיטל אינו ישים, לבסוף חשב את הגבול.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + \sin x}{4x + \cos x} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16^x + 4^{x+1}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (1)$$

**פתרונות:****(1)**

$$\frac{5}{6} (7) \quad \frac{3}{2} (6) \quad \frac{1}{6} (5) \quad 4 (4) \quad n-1 (3) \quad \frac{20}{17} (2) \quad \frac{5}{6} (1)$$

$$2 (14) \quad -\frac{1}{2} (13) \quad \frac{1}{6} (12) \quad \frac{1}{2} (11) \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) (10) \quad 1 (9) \quad -\frac{3}{2} (8)$$

$$\frac{1}{2} (21) \quad \frac{1}{2} (20) \quad \frac{1}{6} (19) \quad \frac{a}{b} (18) \quad \frac{a}{b} (17) \quad 1 (16) \quad 1 (15)$$

$$1 (28) \quad 1 (27) \quad -\frac{3}{4} (26) \quad -\frac{1}{2} (25) \quad -\frac{1}{3} (24) \quad \frac{1}{3} (23) \quad \frac{1}{8} (22)$$

$$0 (35) \quad \infty (34) \quad 0 (33) \quad \infty (32) \quad \frac{1}{2} (31) \quad \frac{1}{2} (30) \quad \frac{2}{3} (29)$$

$$0 (42) \quad 0 (41) \quad 0 (40) \quad 0 (39) \quad 0 (38) \quad 0 (37) \quad 1 (36)$$

$$\frac{1}{2} (49) \quad \ln\frac{3}{5} (48) \quad 0.5 (47) \quad 0 (46) \quad 2.5 (45) \quad 6 (44) \quad 0 (43)$$

$$1 (56) \quad e^2 (55) \quad 1 (54) \quad 1 (53) \quad 1 (52) \quad e (51) \quad -\frac{1}{2} (50)$$

$$1 (63) \quad e (62) \quad 1 (61) \quad 1 (60) \quad e^{-1/2} (59) \quad e^{1/3} (58) \quad e^3 (57)$$

$$e^{-1/6} (65) \quad e (64)$$

**(2)**

$$0.75 (3) \quad 0.25 (2) \quad 1 (1)$$

## פרק 9 - חקירת פונקציה

(1) חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה לפי הפירוט הבא: תחום הגדרה ורציפות, נקודות חיתוך עם הצירים, זוגיות, אסימפטוטות אנכיות, אופקיות ומשופעות, נקודות קיצון, תחומי עליה וירידה, נקודות פיתול, תחומי קמירות וקעירות, גרף.

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2} \quad (3) \qquad f(x) = x^4 - 2x^3 \quad (2) \qquad f(x) = x(x-9)^2 \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2} \quad (6) \qquad f(x) = \frac{x^3}{x^2-4} \quad (5) \qquad f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)^2} \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{x^2-4x+3}{x^2-4} \quad (9) \qquad f(x) = \frac{x^2-1}{(x-2)(x-5)} \quad (8) \qquad f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 \quad (7)$$

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \quad (12) \qquad f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad (11) \qquad f(x) = \frac{x^3-x^2}{x^2-1} \quad (10)$$

$$f(x) = \ln^2 x + 2\ln x - 3 \quad (15) \qquad f(x) = \ln \sqrt{\frac{1}{2-x}} \quad (14) \qquad f(x) = x \cdot \ln x \quad (13)$$

$$f(x) = x - e^x \quad (18) \qquad f(x) = \ln^2 x + \frac{1}{\ln^2 x} \quad (17) \qquad f(x) = 4\ln^2 x - 4\ln x - 3 \quad (16)$$

$$f(x) = x \cdot e^{-2x^2} \quad (21) \qquad f(x) = (x+2) \cdot e^{\frac{1}{x}} \quad (20) \qquad f(x) = e^{\frac{1}{x}} \quad (19)$$

$$f(x) = \left(\sqrt[3]{x^2} - 1\right)^2 \quad (24) \qquad f(x) = \sqrt[3]{x^2}(1-x) \quad (23) \qquad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \quad (22)$$

$$f(x) = x - 2\arctan x \quad (27) \qquad f(x) = \frac{|x-3|}{x-2} \quad (26) \qquad f(x) = \sqrt[3]{x^2-1} \quad (25)$$

$$f(x) = 8\cos x + 2\cos 2x - 3 \quad (30) \quad f(x) = 2\cos^2 x - \sin 2x \quad (29) \quad f(x) = \arcsin(\sin x) \quad (28)$$

$(0 \leq x \leq 2\pi)$                        $(0 \leq x \leq \pi)$

### הערות:

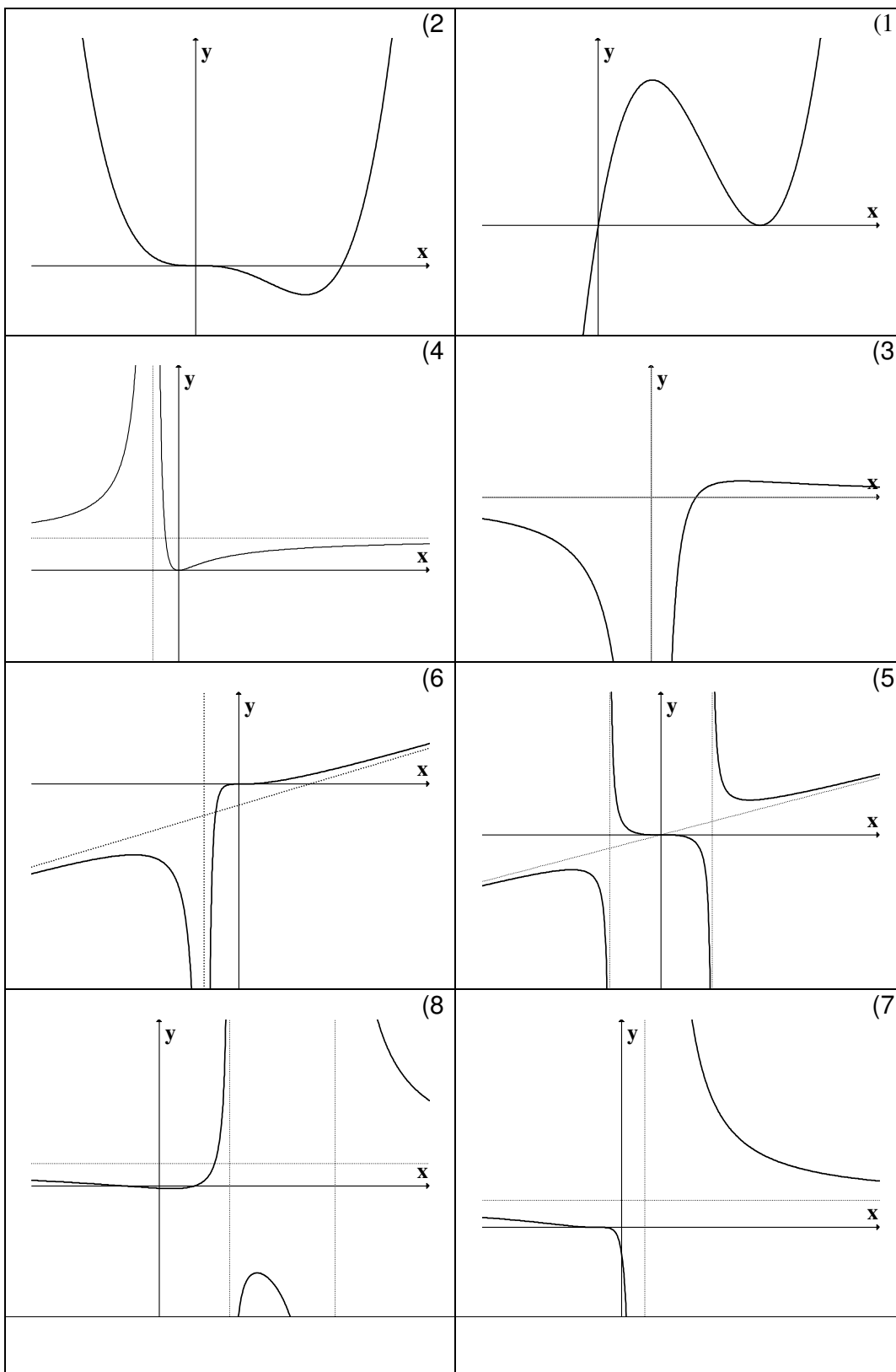
\* בשאלה 27 אין צורך למצוא חיתוך עם ציר  $x$ . בשאלה 18 מצא את החיתוך רק לאחר השרטוט.

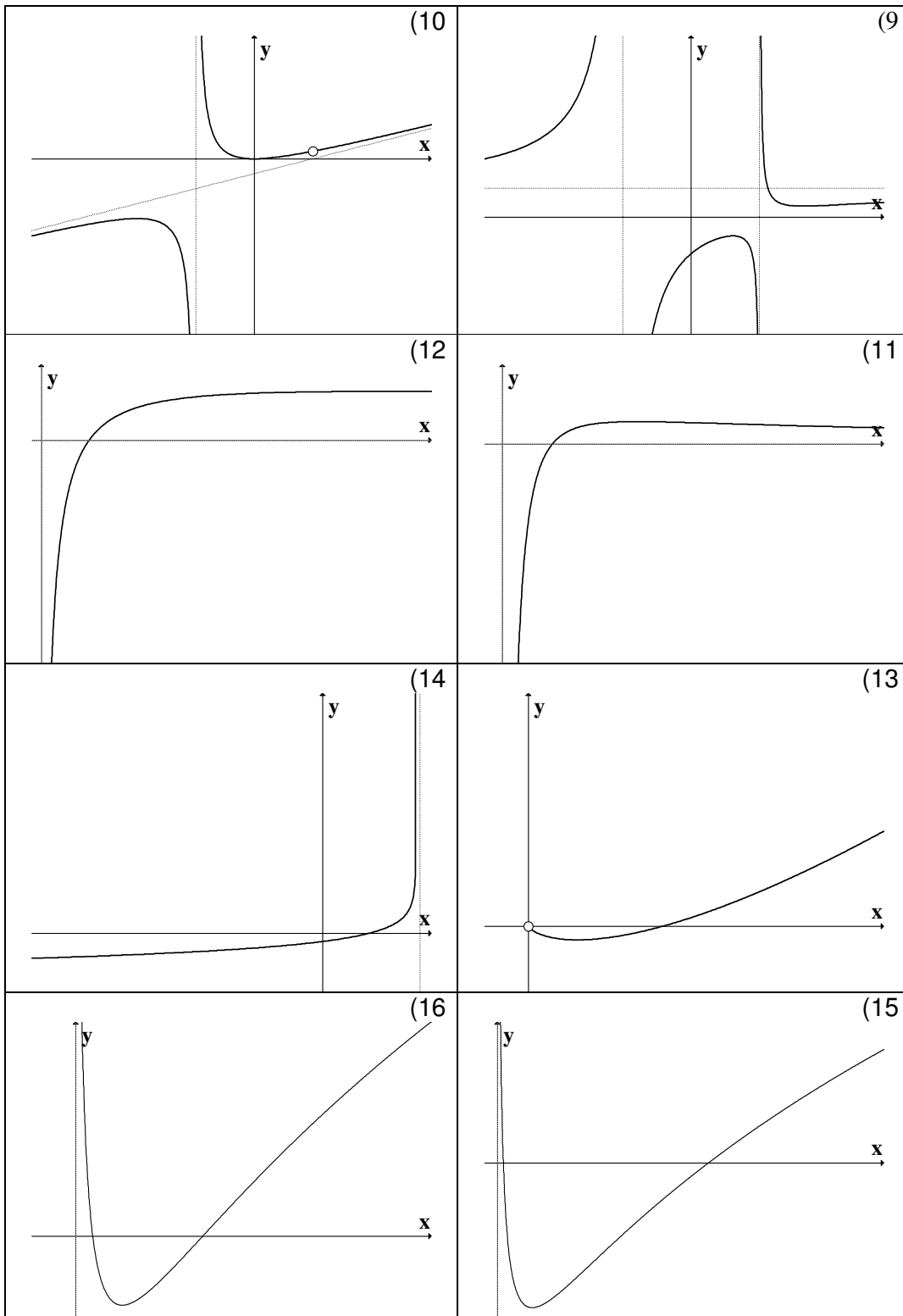
\*\* בתרגילים 1,2,28,29,30 אין צורך למצוא אסימפטוטות (וגם אין).

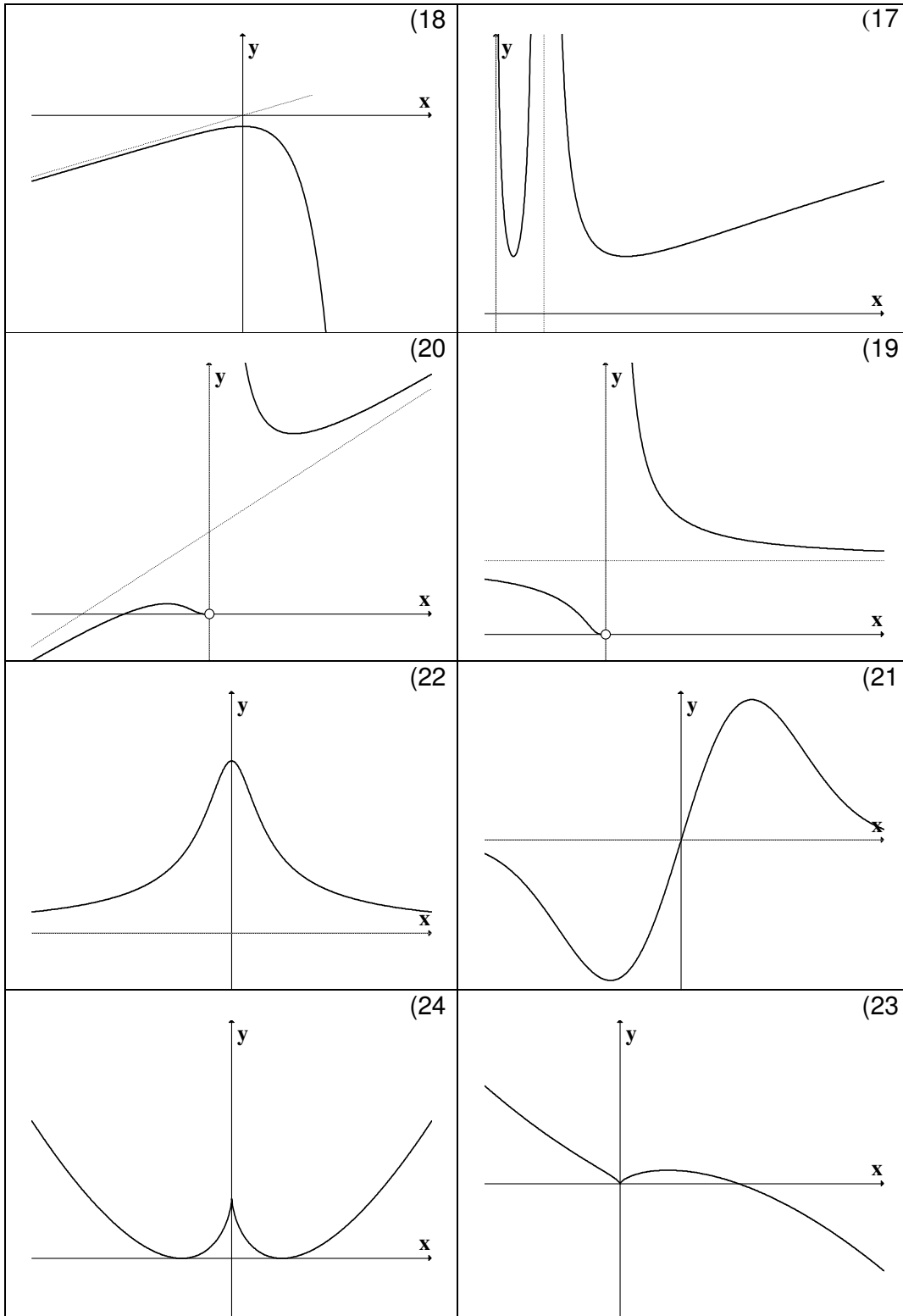
\*\*\* בתרגילים 9,17 אין צורך למצוא נקודות פיתול אלא אם כן למדתם ניוטון רפסון. בתרגיל 8 אין צורך למצוא נקודות פיתול אלא אם כן למדתם לפתור משוואה ממעלה שלישית.

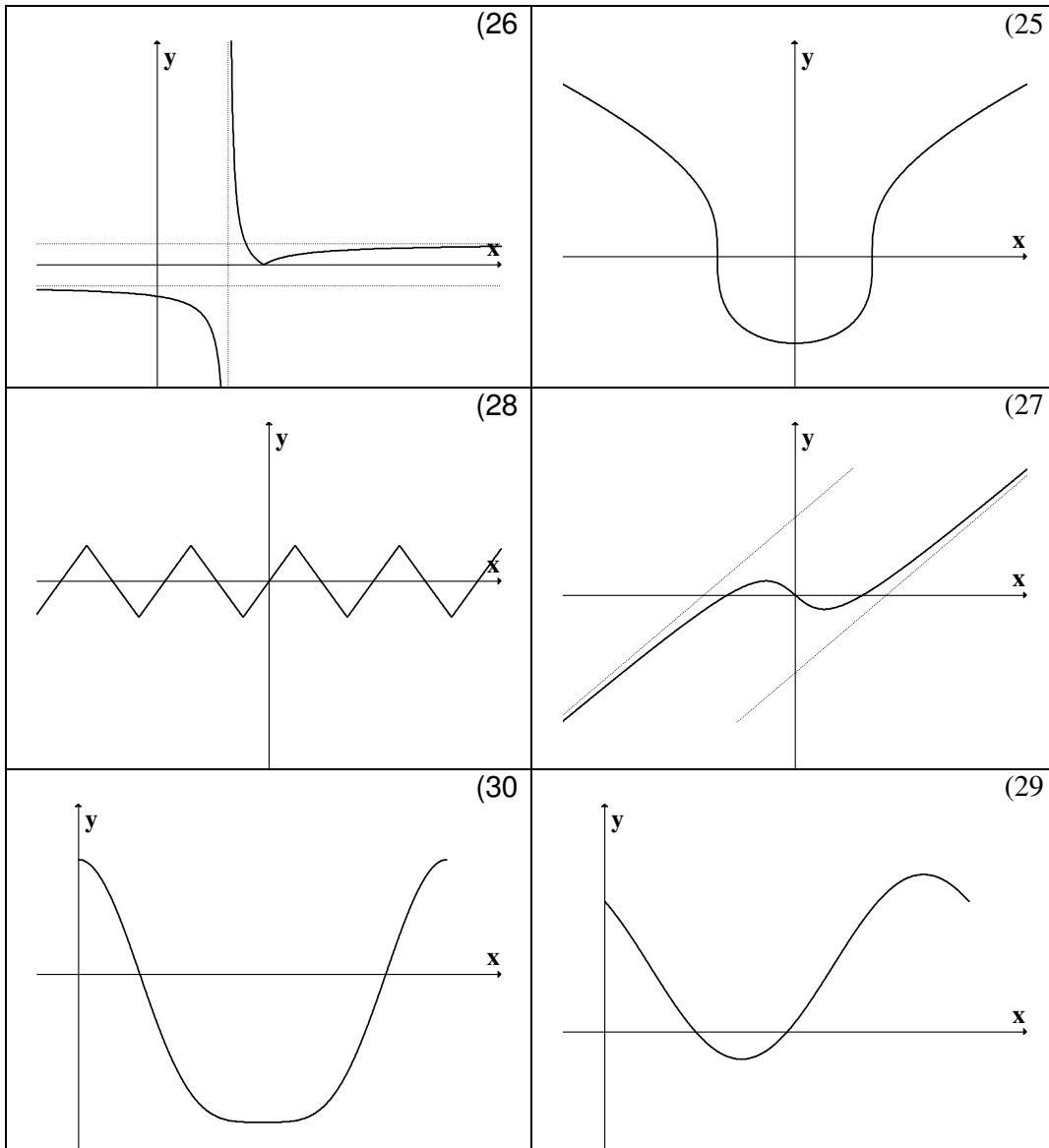
**פתרונות:**

(1)









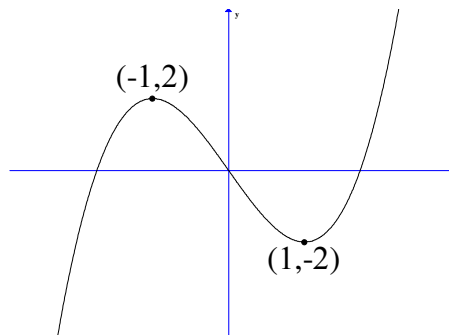
## פרק 10 - חקירת פונקציה - "שאלות מסביב"

(1)

- א) נתונה הפונקציה  $f(x) = ax^3 + x^2$ . ידוע שהנקודה  $x = 1$  נקודת קיצון. מצא את הקבוע  $a$ .
- ב) נתונה הפונקציה  $f(x) = ax^3 + bx^2$ . ידוע שהנקודה  $(1, 2)$  נקודת קיצון. מצא את הקבועים  $a, b$ .
- ג) נתונה הפונקציה  $f(x) = ax^3 + x^2$ . ידוע שהנקודה  $x = 1$  נקודת פיתול. מצא את הקבוע  $a$ .
- ד) נתונה הפונקציה  $f(x) = ax^3 + bx^2$ . ידוע שהנקודה  $(1, 2)$  נקודת פיתול. מצא את הקבועים  $a, b$ .
- ה) נתונה הפונקציה  $f(x) = ax^3 + x^2$  שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה  $x = 3$  הוא 33. מצא את  $a$ .
- ו) נתונה הפונקציה  $f(x) = ax^3 + bx^2$ . שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה  $(3, 9)$  הוא 12. מצא את  $a, b$ .
- ז) נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{ax^3 + x^2}{2x^3 + x + 6}$ . ידוע שהישר  $y = 4$  אסימפטוטה לגרף הפונקציה. מצא את  $a$ .
- ח) נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{ax^2 + bx + 4}{x}$ . ידוע שהישר  $y = 0.5x + 1$  אסימפטוטה לגרף הפונקציה. מצא את  $a$  ואת  $b$ .
- ט) נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{x^2 + ax + 6}$ . ידוע שהישר  $x = 1$  אסימפטוטה לגרף הפונקציה. מצא את  $a$ .

(2) לפי גרף הפונקציה  $f(x) = x^3 - 3x$ 

- א. מהו מספר הפתרונות של המשוואה  $f(x) = 5$ .
- ב. מהו מספר הפתרונות של המשוואה  $f(x) = 2$ .
- ג. מהו מספר הפתרונות של המשוואה  $f(x) = 0.5$ .
- ד. עבור איזה ערך של  $k$  למשוואה  $f(x) = k$  יש בדיוק פתרון אחד.
- ה. עבור איזה ערך של  $k$  למשוואה  $f(x) = k$  יש בדיוק שני פתרונות.
- ו. עבור איזה ערך של  $k$  למשוואה  $f(x) = k$  יש בדיוק שלושה פתרונות.
- ז. האם קיים ערך של  $k$  עבורו למשוואה  $f(x) = k$  אין פתרון.
- ח. מצא את התחומים בהם הפונקציה היא ח"ע.



לפתרון מלא בסרטון פלאש היכנסו ל- [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

כתב ופתר - גיא סלומון ©



(3) הוכח את אי השוויונים הבאים לגבי התחום הרשום לידם :

$$(1) \quad 8x^3 \leq 3x^4 + 6x^2 \quad (-\infty < x < \infty) \quad (2) \quad x < 2\sin x \quad (0 < x < \frac{\pi}{3})$$

$$(3) \quad \sqrt{x+1} < 1 + \frac{x}{2} \quad (x > 0) \quad (4) \quad \ln(x+1) \leq x \quad (x \geq 0)$$

**פתרונות:**

(1)

א)  $a = -\frac{1}{3}$

ב)  $b = 6, a = -4$

א)  $a = -\frac{2}{3}$

ו)  $a = \frac{2}{3}, b = -1$

ה)  $a = 1$

ד)  $b = 3, a = -1$

ט)  $a = -7$

ח)  $a = 0.5$

ז)  $a = 8$

(2)

א) 3

ב) 2

א) 1

ו)  $-2 < k < 2$

ה)  $k = \pm 2$

ד)  $k < -2$  או  $k > 2$

ח)  $-1 < x < 1$  או  $x < -1$   
או  $x > 1$

ז) לא

## פרק 11 - מקסימום ומינימום מוחלטים של פונקציה

(1) מצא את נקודות המינימום המוחלט והמקסימום המוחלט של הפונקציות הבאות בתחומים הרשומים לידן (אם יש כאלה):

$$f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x + 5} \quad (2) \quad (-1 \leq x \leq 3) \quad f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x \quad (1)$$

$$\left(\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{7}{2}\right) f(x) = \begin{cases} 4x-2 & x < 1 \\ (x-2)(x-3) & x \geq 1 \end{cases} \quad (4) \quad (-1 \leq x \leq 20) \quad f(x) = x^{2/3}(20-x) \quad (3)$$

$$(-5 < x < -1) \quad f(x) = \frac{x^2}{x+1} \quad (6) \quad (-5 \leq x \leq 1) \quad f(x) = 1 + |9 - x^2| \quad (5)$$

$$(-\infty < x < \infty) \quad f(x) = x^3 - 9x + 1 \quad (7)$$

(2) הוכח את אי השוויונים שמימין לגבי התחום הרשום בסוגריים משמאל.

$$(x \leq 1) \quad 0 \leq x^2 e^{x-1} \leq 1 \quad (3) \quad (x \geq 0) \quad x e^{-\sqrt{x}} \leq 1 \quad (2) \quad (x \text{ לכל } x) \quad x^3 e^{-x} \leq \frac{27}{e^3} \quad (1)$$

### פתרונות:

(1)

- (1)  $(-1, -7)$  מינימום מוחלט,  $(3, 9)$  מקסימום מוחלט.
- (2)  $(-1, 0)$  מינימום מוחלט,  $(5, 0)$  מינימום מוחלט,  $(2, 3)$  מקסימום מוחלט.
- (3)  $(0, 0)$  מינימום מוחלט,  $(20, 0)$  מינימום מוחלט,  $(8, 48)$  מקסימום מוחלט.
- (4)  $(2.5, -0.25)$  מינימום מוחלט,  $(1, 2)$  מקסימום מוחלט.
- (5)  $(-3, 1)$  מינימום מוחלט,  $(-5, 17)$  מקסימום מוחלט.
- (6)  $(-2, -4)$  מקסימום מוחלט. אין מינימום מוחלט.
- (7) אין מקסימום ואין מינימום.

הערת סימון:

$$[a, b] \Leftrightarrow a \leq x \leq b, \quad (a, b) \Leftrightarrow a < x < b, \quad [a, b) \Leftrightarrow a \leq x < b$$

## פרק 12 - בעיות מקסימום ומינימום

הערה: בפרק זה, סומנו התרגילים הקשים יותר בכוכבית \*

### בעיות בהנדסת המישור

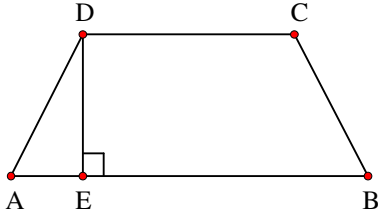
(1) בטרפז שווה-שוקיים ABCD ( $AB \parallel CD$ ) אורך השוק

הוא 4 ס"מ ואורך הבסיס הקטן הוא 6 ס"מ.

DE הוא הגובה מקדקוד D (ראה ציור).

מה צריך להיות אורך הקטע DE כדי ששטח הטרפז

יהיה מקסימלי?



(2) נתון מלבן ABCD. נסמן ב- $x$  את אחת מצלעות

המלבן (ראה ציור).

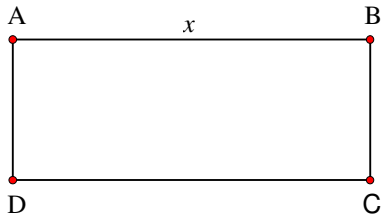
(א) אם היקף המלבן הוא 60 ס"מ בטא באמצעות  $x$

את שטח המלבן.

(ב) אם היקף המלבן הוא  $p$  מצא מה צריכים להיות

אורכי צלעות המלבן כדי ששטחו יהיה מקסימלי

(הבע את אורכי הצלעות באמצעות  $p$ ).



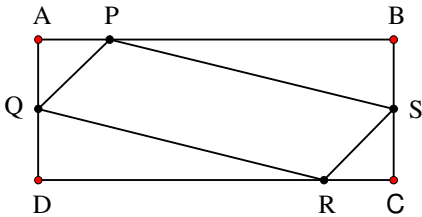
(3) נתון מלבן ABCD כך ש- $AD = BC = 5$  ס"מ,  $AB = CD = 10$  ס"מ.

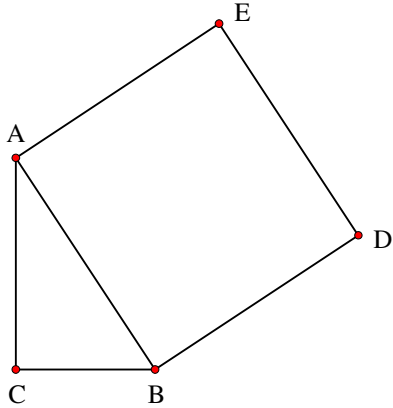
על צלעות המלבן מקצים

קטעים:  $AP = AQ = CS = CR = x$ : (ראה ציור).

מה צריך להיות ערכו של  $x$  כדי ששטח

המקבילית PQRS יהיה מקסימלי?

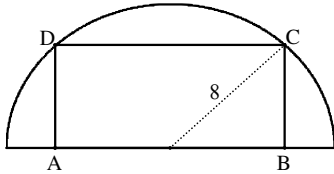




(4)

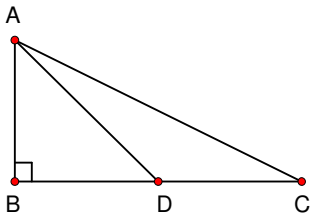
במשולש ישר זווית  $\Delta ABC$  ( $\angle C = 90^\circ$ ) סכום אורכי הניצבים הוא 8 ס"מ. על היתר AB בונים ריבוע ABDE. מה צריכים להיות אורכי הניצבים, כדי ששטח המחומש AEDBC יהיה מינימלי.

(5)



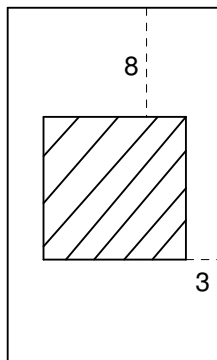
בחצי עיגול שרדיוסו 8 ס"מ חוסמים מלבן ABCD, כך שהצלע AB של המלבן מונחת על הקוטר, והקדקודים C ו-D מונחים על הקשת (ראה ציור). מה צריך להיות אורך הצלע AB כדי ששטח המלבן יהיה מקסימלי?

(6)



במשולש ישר-זווית  $\Delta ABC$  ( $\angle B = 90^\circ$ ), סכום אורכי הניצבים הוא 30 ס"מ. AD הוא תיכון לניצב BC (ראה ציור). חשב מה צריכים להיות אורכי הניצבים, על מנת שריבוע אורך התיכון יהיה מינימלי.

(7)

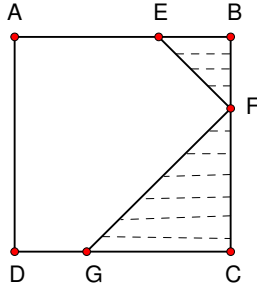


בחוברת פרסום, שטח כל עמוד הוא 600 סמ"ר. רוחב השוליים בראש העמוד ובתחתיתו הוא 8 ס"מ, ורוחב השוליים בצדדים הוא 3 ס"מ. מצא מה צריך להיות האורך והרוחב של כל עמוד, כדי שהשטח המיועד לדפוס יהיה מקסימלי (השטח המקווקו בציור).

(8) בריבוע ABCD הנקודות E, F, G נמצאות על הצלעות

AB, BC, CD בהתאמה, כך ש-  $BE = BF$ ,  $CF = CG$

(ראה ציור).



נתון כי האורך של צלע הריבוע הוא 6 ס"מ.

א. סמן ב-  $x$  את BF ואת BE, והבע באמצעות  $x$  את

הסכום של שטחי המשולשים EBF ו-FCG (השטח

המקווקו בציור).

ב. מצא את  $x$  שעבורו סכום שטחי המשולשים הוא

מינימלי.

ג. חשב את הסכום המינימלי של שטחי המשולשים.

(9\*) נתון ריבוע ABCD שאורך צלעו 10 ס"מ. E היא נקודה

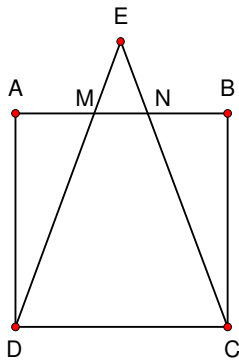
כלשהי מחוץ לריבוע, כך שהמשולש DEC הוא שוו"ש

( $ED = EC$ ). שוקי המשולש חותכים את הצלע AB

בנקודות M ו- N (ראה ציור). מצא מה צריך להיות

אורך הקטע AM כדי שהסכום של שטחי המשולשים

EMN, AMD, BNC יהיה מינימלי.



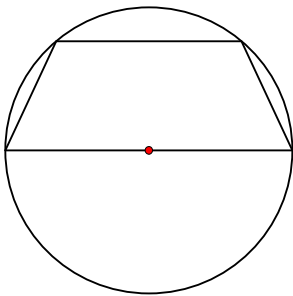
(10\*) נתון מעגל שרדיוסו R. במעגל זה חסום טרפז שוו"ש,

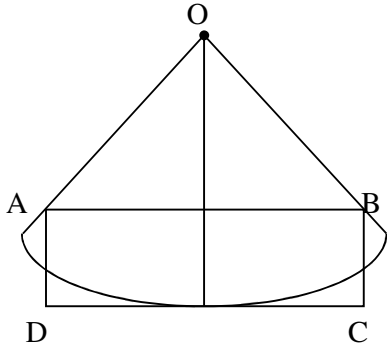
כך שהבסיס הגדול של הטרפז הוא קוטר במעגל (ראה

ציור). מבין כל הטרפזים החסומים באופן זה, הבע

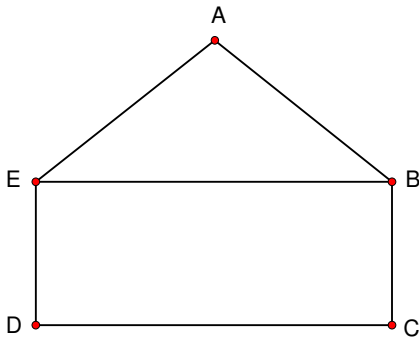
באמצעות R את אורך הבסיס הקטן בטרפז ששטחו

מקסימלי.



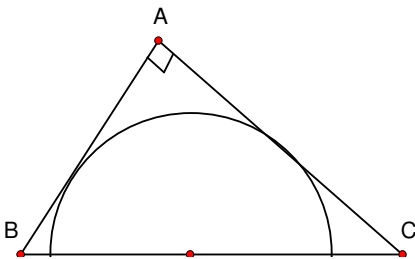


(11) נתונה גזרה של רבע עיגול שמרכזו O ורדיוסו 10 ס"מ.  
 בונים מלבן ABCD, כך שרבע המעגל משיק לצלע DC  
 בנקודת האמצע שלה, והקודקודים A ו-B נמצאים על  
 הרדיוסים התוחמים את הגזרה (ראה ציור).  
 מבין כל האלכסונים של המלבנים ABCD שנוצרים  
 באופן זה, מצא את אורך האלכסון הקצר ביותר.

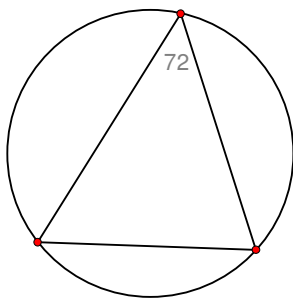


(12) ABCDE הוא מחומש המורכב ממשולש ABE ומלבן  
 EBCD (ראה ציור).

נתון:  $BC = 2$  ס"מ,  $AB = AE = 4$  ס"מ.  
 מצא את השטח של המחומש ששטחו מקסימלי.



(13) מתבוננים בכל המשולשים ישרי הזווית ABC  
 החוסמים חצי מעגל שרדיוסו R כמתואר בציור.  
 מהן זוויות המשולש שסכום הניצבים שלו הוא  
 מינימלי?



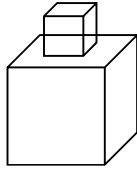
(14) במעגל שרדיוסו R חסומים משולשים כך שהגודל של

אחת הזוויות בכל אחד מהמשולשים הוא  $\frac{2\pi}{5}$ .

מצא את הזוויות במשולש בעל ההיקף המקסימלי.

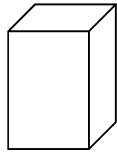
**בעיות בהנדסת המרחב**

(15) גובהו של "מגדל" הבנוי שמתי קוביות) לאו דווקא שוות) הוא 8 ס"מ. מה צריך להיות אורך המקצוע ש הקובייה התחתונה כדי שנפח המגדל (סכום נפחי הקוביות) יהיה מינימלי ?

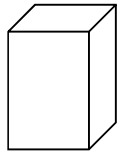


(16) בונים תיבה שגובהה  $y$  ס"מ, ובסיסה ריבוע, שאורך

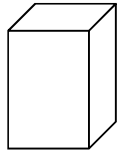
צלעו  $x$  ס"מ (ראה ציור), כך שההיקף של כל אחת מהדפנות הצדדיות שווה ל-12 ס"מ. מה צריך להיות אורך צלע הבסיס כדי שנפח התיבה יהיה מקסימלי?



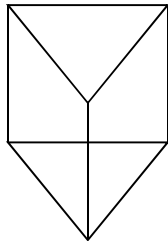
(17) יש לבנות תיבה פתוחה מלמעלה, שבסיסה ריבוע ושטח פניה 75 סמ"ר ( במקרה זה שטח הפנים מורכב מבסיס אחד ומארבע פאות צדדיות). מכל התיבות שאפשר לבנות, מצא את ממדי התיבה (צלע הבסיס וגובה) שנפחה מקסימלי.

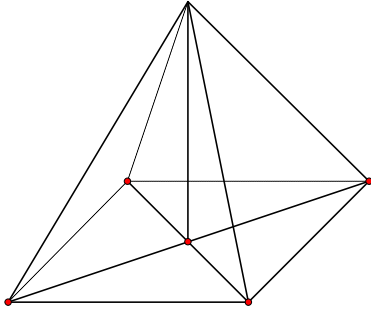


(18) יש להכין מחוט תיל "שלד" (מסגרת) של תיבה, שבסיסה ריבוע ונפחה 1000 סמ"ק. מהו האורך המינימלי של החוט הנחוץ ליצירת התיבה?



(19) מחוט שאורכו  $a$  ס"מ יש לבנות מנסרה משולשת ישרה, שבסיסה הוא משולש שווה צלעות. מצא איזה חלק מאורך החוט יש להקצות לצלע הבסיס  $x$  ואיזה חלק לגובה  $y$  כדי שיתקיים: א. שטח המעטפת של המנסרה יהיה מקסימלי. ב. נפח המנסרה יהיה מקסימלי.





(20) מכל הפירמידות המרובעות, המשוכללות והישרות,

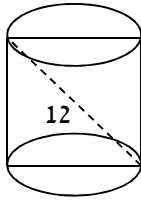
שאורך המקצוע הצדדי שלהן הוא  $a$ , מצא את נפחה של הפירמידה בעלת הנפח המקסימלי.

(21) מכל הפירמידות הישרות, שבסיסן ריבוע ושטח

הפנים שלהן הוא 200 סמ"ר, חשב את נפחה של הפירמידה בעלת הנפח המקסימלי.

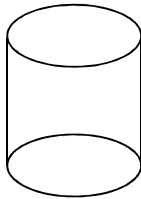
(22) אלכסון החתך הצירי של גליל ישר הוא 12 ס"מ (ראה

ציור). מצא מה צריכים להיות גובה הגליל ורדיוס בסיסו כדי שנפחו יהיה מקסימלי.



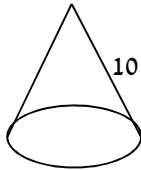
(23) נתון מיכל גלילי פתוח מלמעלה שקיבולו 64 מ"ק.

המיכל עשוי כולו מפח. הראה כי שטח הפח הוא מינימלי כאשר רדיוס הבסיס הוא  $\frac{4}{\sqrt[3]{\pi}}$  מטר.



(24) מבין כל החרוטים שאורך הקו היוצר שלהם הוא 10

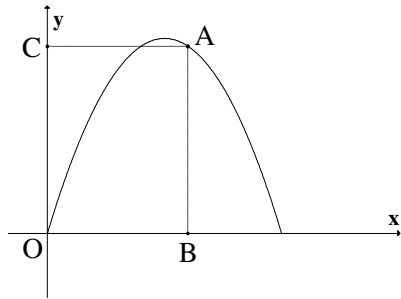
ס"מ (ראה ציור), מהו נפח החרוט שנפחו מקסימלי?





**בעיות בפונקציות וגרפים**

(25) מנקודה A, הנמצאת על גרף הפונקציה



$$y = -x^2 + 5x, \text{ מורידים אנכים לצירים כך שנוצר}$$

מלבן ABOC (ראה ציור).

א. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי שהיקף

המלבן יהיה מקסימלי?

ב. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי שהיקף

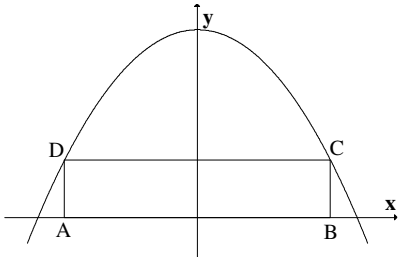
המלבן יהיה מינימלי?

(26) בפרבולה  $y = 9 - x^2$  חוסמים מלבן ABCD, כך

שהצלע AB מונחת על ציר ה-x (ראה ציור).

מה צריך להיות אורך הצלע CD כדי ששטח המלבן

יהיה מקסימלי?



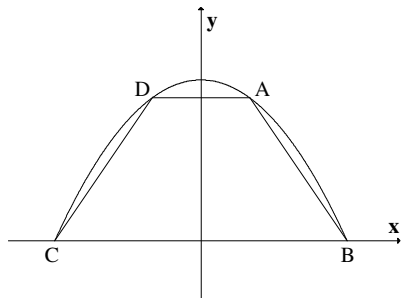
(27) טרפז ABCD חסום בין גרף הפרבולה  $y = 9 - x^2$

לבין ציר ה-x (ראה ציור).

א. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי ששטח

הטרפז ABCD יהיה מקסימלי?

ב. חשב את השטח המקסימלי של טרפז ABCD.



(28) נתונה הפרבולה  $y = -x^2 + 12$ . ישר המקביל לציר ה-

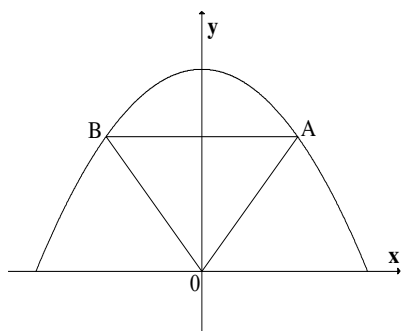
x חותך את הפרבולה בנקודות A ו-B (ראה ציור).

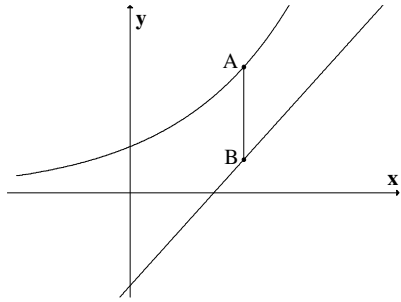
מתברים את הנקודות A ו-B עם ראשית הצירים, O.

א. מה צריך להיות אורך הקטע AB כדי ששטח

המשולש AOB יהיה מקסימלי?

ב. מהו השטח המקסימלי של המשולש AOB ?





(29) לפניך גרף של הפונקציה  $y = e^x$  וגרף של הישר

$$y = e \cdot x - 2$$

הגרפים בנקודות A ו-B (ראה ציור).

א. מצא לאילו ערכי x אורך הקטע AB יהיה מינימלי.

ב. האם יש ערך של x שעבורו אורך הקטע AB הוא

מקסימלי?

(30) נתונים הגרפים של שתי פרבולות :

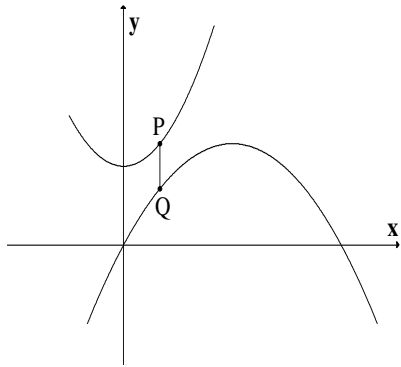
$$y = -\frac{1}{4}x^2 + 3x, \quad y = \frac{1}{2}x^2 + 7$$

קו מקביל לציר ה-y חותך את שתי הפרבולות

בנקודות P ו-Q (ראה ציור).

מבין כל הקטעים המתקבלים באופן זה, מצא את

האורך המינימלי של הקטע PQ.

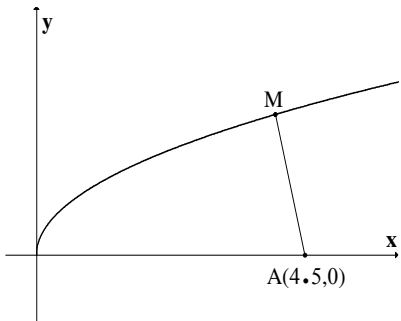


(31) נתון גרף הפונקציה  $y = \sqrt{x}$ . על ציר ה-x נתונה

הנקודה  $A(4.5, 0)$  (ראה ציור).

מצא על גרף הפונקציה נקודה M, כך שריבוע המרחק

AM יהיה מינימלי.



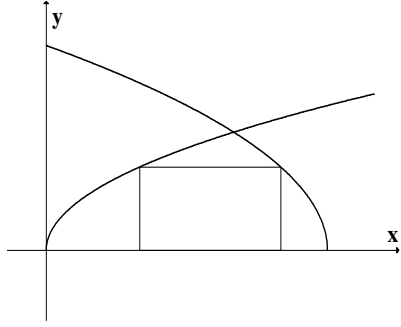
(32) מצא על הישר  $f(x) = 3x - 4$  את הנקודה הקרובה

ביותר לנקודה  $(0, 1)$ .

(33) בציור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות:

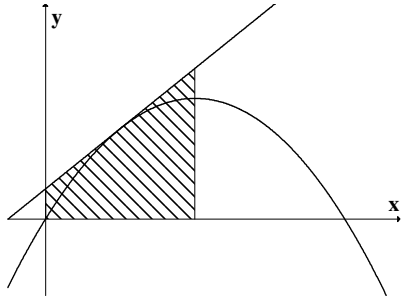
$$g(x) = \sqrt{36-6x}, \quad f(x) = \sqrt{3x}$$

מלבן חסום בין הגרפים של הפונקציות ובין ציר ה- $x$ , כמתואר בציור. מצא את השטח הגדול ביותר האפשרי למלבן שחסום באופן זה.



(34) דרך איזו נקודה על הפרבולה  $y = -x^2 + 2x$  צריך

להעביר משיק, כדי ששטח הטרפז, הנוצר על ידי המשיק והישרים:  $x=0$ ,  $x=1$  ו- $y=0$  (השטח המקווקו שבציור) יהיה מינימלי?



(35) נקודה B נמצאת על גרף הפונקציה  $y = x^2$  ברביע

הראשון. A היא הנקודה  $(0, a)$  כאשר ידוע כי

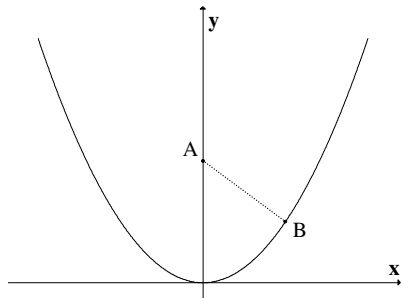
$$a > 0.5 \text{ (ראה ציור).}$$

א. בטא באמצעות  $a$  את שיעורי הנקודה B, שעבורה

המרחק AB הוא מינימלי.

ב. מצא עבור איזה ערך של  $a$  המרחק המינימלי

הוא 2.



(36) נתונה הפרבולה  $y = x^2$ , ונתון משיק לפרבולה

שמשוואתו היא  $y = 6x - 9$ . בנקודה  $(t, t^2)$  שעל

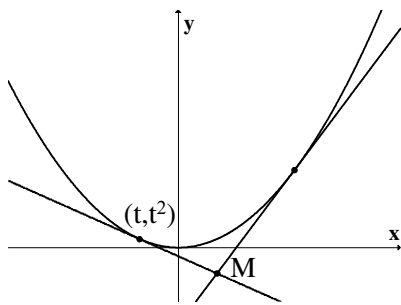
הפרבולה מעבירים משיק נוסף לפרבולה.

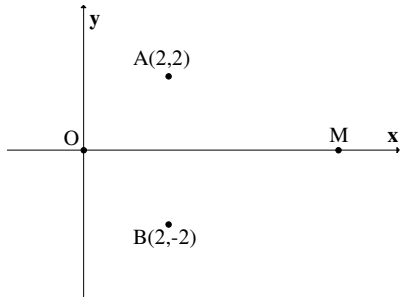
המשיקים נחתכים בנקודה M (ראה ציור).

א. הבע את משוואת המשיק הנוסף באמצעות  $t$ .

ב. מצא את  $t$  שעבורו אורך הקטע, המחבר את

הנקודה M עם קודקוד הפרבולה יהיה מינימלי.





(37) במערכת צירים נתונות הנקודות  $A(2,2)$  ו-

$B(2,-2)$ . ראשית הצירים היא בנקודה  $M.O$  היא

נקודה על ציר ה- $x$  בתחום  $x > 0$ . מה צריכים להיות

שיעורי הנקודה  $M$ , כדי שהסכום:  $OM + MA + MB$

יהיה מינימלי?

### פתרונות:

- (1)  $AE = 1.7 \text{ cm}$  . א. (2)  $(30-x)$  . ב. כל צלע שווה ל-  $0.25p$  . (3)  $x = 3.75 \text{ cm}$  .
- (4)  $AC = BC = 4 \text{ cm}$  . (5)  $AB = 2\sqrt{32} \text{ cm}$  . (6)  $B = 6 \text{ cm}$ ,  $BC = 24 \text{ cm}$  . (7) אורך: 40 ס"מ
- רוחב: 15 ס"מ. (8) א.  $S = x^2 - 6x + 18$  . ב. 1.  $x = 3$  . ב. 2. 9 סמ"ר. (9)  $AM = 5/\sqrt{2}$  .
- (10) בסיס קטן  $R = 4\sqrt{5} \text{ cm}$  . (11)  $4\sqrt{5} \text{ cm}$  . (12)  $12\sqrt{3}$  סמ"ר. (13)  $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$  .
- (14)  $\frac{3\pi}{10}, \frac{3\pi}{10}, \frac{2\pi}{5}$  . (15) 4 ס"מ. (16) 4 ס"מ. (17) צלע הבסיס: 5 ס"מ. גובה: 2.5
- ס"מ. (18) 120 ס"מ. א. (19)  $x = \frac{1}{12}a$ ,  $y = \frac{1}{6}a$  . ב.  $x = y = \frac{1}{9}a$  . (20)  $\frac{4\sqrt{3}}{27}a^3$  .
- (21)  $\frac{500}{3}$  סמ"ק. (22) גובה:  $\sqrt{48}$  ס"מ. רדיוס:  $\sqrt{24}$  ס"מ. (24) 403.1 סמ"ק.
- (25) א.  $A(3,6)$  . ב.  $A(0,0)$  או  $A(5,5)$  . (26)  $CD = 2\sqrt{3}$  . (27) א.  $A(1,8)$  . ב. 32.
- (28) א.  $AB = 4$  . ב.  $S_{\Delta AOB} = 16$  . (29) א.  $x = 1$  . ב. אין. (30)  $PQ = 4$  .
- (31)  $M(4,2)$  . (32)  $(1.5, 0.5)$  . (33) 8 . (34)  $(0.5, 0.75)$  .
- (35) א.  $B(\sqrt{(2a-1)/2}, (2a-1)/2)$  . ב. 4.25 . (36) א.  $y = 2t \cdot x - t^2$  . ב.  $t = -3/37$  .
- (37)  $M(0.845, 0)$  .

**פרק 13 - פתרון משוואות (משפט ערך הביניים, מונוטוניות (משפט רול),**

**ניוטון רפסון**

- (1) הוכח שלמשוואות הבאות יש בדיוק פתרון אחד:  
 $-4x^3 + 21x^2 - 48x + 28 = 0$  (4)  $x - 0.25\sin x = 7$  (3)  $x^2 = -\ln x$  (2)  $x^3 + 4x - 1 = 0$  (1)
- (2) נתונה המשוואה  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  ונתון כי  $b^2 < 3ac$ . מהו מספר הפתרונות של המשוואה? הוכח את תשובתך.  
 (3) עבור כל אחת מהמשוואות הבאות מצא את מספר הפתרונות ופתור אותה.  
 $x^2 + x \sin x = 1 - \cos x$  (4)  $\ln(x+5) - 4 = x$  (3)  $\arctan x - x = 0$  (2)  $e^{x-1} = x$  (1)
- (4) תהי  $f$  פונקציה גזירה לכל  $x$  המקיימת:  $f'(x) \leq 1$ ,  $f(0) = 1$ ,  $f(1) = 2$ . הוכח שלמשוואה  $f(x) + \sin x = 4x$  יש בדיוק פתרון אחד.  
 (5) הוכח שלמשוואות הבאות יש בדיוק שני פתרונות:  
 $1 + 4x^4 = 8x^3$  (3)  $4x^3 + 5x - \frac{1}{x} = 0$  (2)  $e^x - 5x = 0$  (1)
- (6) בכל אחת מהמשוואות הבאות מצא קשר בין הפרמטרים על מנת שלמשוואות יהיה בדיוק פתרון אחד (הנח שכל הפרמטרים שונים מאפס).  
 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  (2)  $ax^2 + bx + c = 0$  (1)
- (3)  $(n > 4, \text{ odd}) ax^n + bx^{n-2} + cx^{n-4} - d = 0$  (4)  $x + a \cos(bx) = 1$  (3)
- (7) פתור את המשוואות הבאות (סעיפים 2,3 בשיטת ניוטון רפסון):  
 $-4x^3 + 21x^2 - 48x + 28 = 0$  (3)  $1 + 4x^4 = 8x^3$  (2)  $7x^3 - 33x^2 + 21x + 61 = 0$  (1)

**פתרונות:**

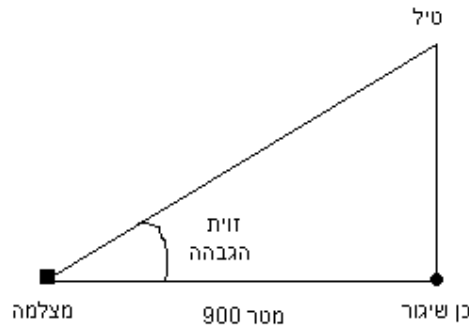
- (2) פתרון יחיד. (3) (1)  $x = 1$  (2)  $x = 0$  (3)  $x = -4$  (4)  $x = 0$ .
- (6) (1)  $b^2 - 4ac = 0$  (2)  $4b^2 - 12ac < 0$  (3)  $\frac{1}{ab} > 1$  או  $\frac{1}{ab} < -1$
- (4)  $b^2(n-2)^2 - 4anc(n-4) < 0$
- (7) (1) פתרון מדויק  $x = -1$ . (2) פתרונות מקורבים  $x = 0.5576$ ,  $x = 1.9672$   
 (3) פתרון מקורב  $x = 0.8459$

## פרק 14 - בעיות קצב שינוי

(1) נפט דולף ממכלית ומתפשט בצורת כתם מעגלי. רדיוס הכתם גדל בקצב קבוע של 0.5 מ' לשנייה. באיזה קצב גדל שטח הכתם כאשר הרדיוס הוא 20 מ' ?

(2) סולם באורך 2.5 מ', השעון על קיר אנכי מחליק באופן כזה, שברגע שרגליו נמצאות במרחק 2 מ' מהקיר הן מתרחקות ממנו בקצב של 1 מטר לשנייה. באיזה מהירות יורד ראש הסולם לאורך הקיר ברגע זה ?

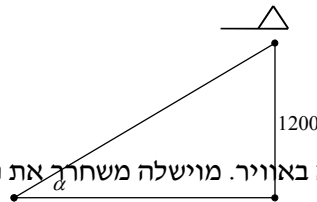
(3) מצלמה מוצבת מרחק 900 מ' מכך לשיגור טילים (ראה איור). הטיל נוסק אנכית במהירות של 260 מ' לשנייה בהיותו בגובה של 1200 מ'.  
 א. באיזו מהירות צריכה זווית ההגבהה של המצלמה להשתנות אז, כדי להמשיך לקלוט את דמות הטיל ?  
 ב. באיזה קצב משתנה אז המרחק בין המצלמה לטיל?



(4) מסננת בצורת חרוט משמשת לטיהור נוזל ממשקעים. גובה החרוט 40 ס"מ ורדיוס הבסיס שלו 10 ס"מ. כאשר גובה פני הנוזל בחרוט 20 ס"מ, הנוזל זורם מן החרוט בקצב של 30 סמ"ק לדקה. באיזה מהירות קטן גובה פני הנוזל בחרוט באותו רגע ?

(5) מטוס טס אופקית בגובה קבוע של 1200 מטר מעל לנקודת תצפית קבועה. ברגע מסוים המטוס נצפה בזווית של  $\alpha = 30^\circ$ . ברגע זה הזווית קטנה, ומהירות המטוס היא 480 ק"מ לשעה.  
 א. באיזה קצב קטנה  $\alpha$  באותו רגע ? בטא את התוצאה במעלות לשנייה.  
 ב. באיזה קצב משתנה אז המרחק בין המטוס לנקודת התצפית ? בטא את התוצאה במטרים לשנייה.

(6) למוישה בלון בצורת כדור המלא באוויר. מוישלה משחרר את האוויר מהבלון בקצב קבוע של 2 סמ"ק בשנייה. באיזה קצב קטן שטח פני הבלון כאשר רדיוסו הוא 3 ס"מ ?



(7) נתון חרוט שרדיוס בסיסו וגובהו שווים ל- 3 ס"מ.

פוחחים ברז ומים זורמים לחרוט בקצב קבוע של  $L$  סמ"ק לשנייה.

א. הוכח כי לאחר  $\frac{9\pi}{L}$  שניות החרוט יהיה מלא מים.

ב. נסמן ב-  $h(t)$  את גובה פני החרוט בזמן  $t$ . מהו קצב עליית המים בחרוט כאשר

$$h(t) = 1.5_{cm} ?$$

$$(8) \text{ חלקיק נע לאורך עקומה שהמשוואה שלה: } \frac{xy^3}{1+y^2} = \frac{8}{5}$$

נתון שיעור ה-  $x$  של החלקיק גדל בקצב של 6 יחידות לשנייה ברגע שבו החלקיק נמצא בנקודה  $(1, 2)$ .

א. באיזה קצב משתנה אז שיעור ה-  $y$  של החלקיק.

ב. האם החלקיק עולה או יורד באותו רגע ?

(9) כדור שלג שרדיוסו ההתחלתי 4 ס"מ נמס כך שהקצב שבו רדיוסו קטן פרופורציונאלי

לשטח פניו. לאחר כחצי שעה רדיוס הכדור שווה ל- 3 ס"מ.

א. רשום נוסחה שתתאר את רדיוס הכדור בזמן  $t$ .

ב. כעבור כמה זמן יהיה נפח הכדור השלג  $1/64$  מנפחו ההתחלתי ?

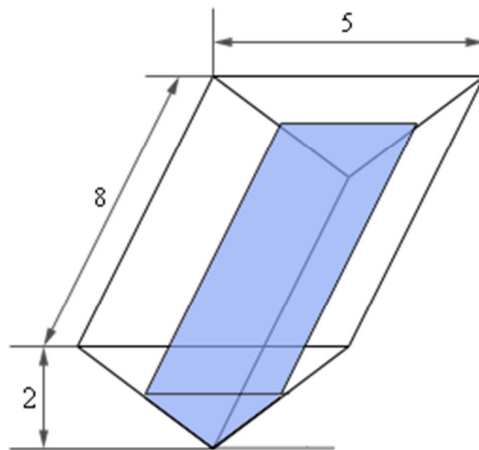
(10) מבלון מלא אוויר שרדיוסו  $R$  מתחיל לצאת אוויר. קצב יציאת האוויר הוא  $-3V(t)$

כאשר  $V(t)$  הוא נפח הבלון בזמן  $t$ .

הוכח כי לאחר  $\ln 2$  שניות נפח הבלון יקטן לשמינית מערכו ההתחלתי.

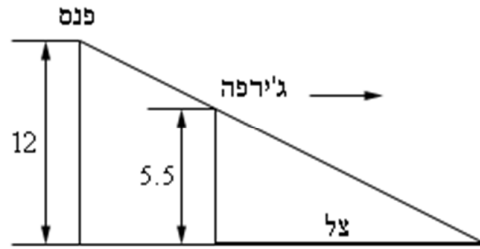
הערה: תרגילים המסומנים ב- (\*) דורשים יכולת פתרון מד"ר בהפרדת משתנים

(11) נתונה שוקת מים שעומקה 8 מטרים וצורתה מנסרה משולשת שבסיסה משולשים שווי שוקיים שבסיסם 5 מ' וגובהם 2 מ' (ראה ציור). אם מים מוזרמים לשוקת בקצב קבוע של 6 מטרים מעוקבים לשנייה, באיזה קצב משתנה גובה המים כאשר גובהם 120 סנטימטרים.

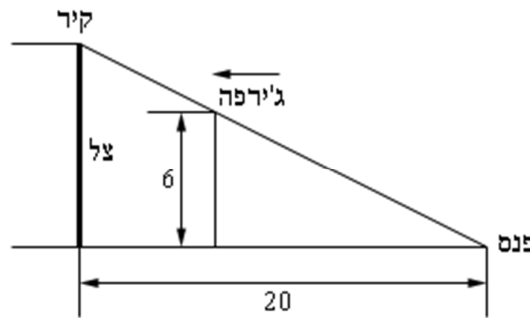


(12) פנס נמצא בראש עמוד שגובהו 12 מטר. גירפה שגובהה 5.5 מטרים מתרחקת מהעמוד בקצב של 2 מטרים בשנייה.

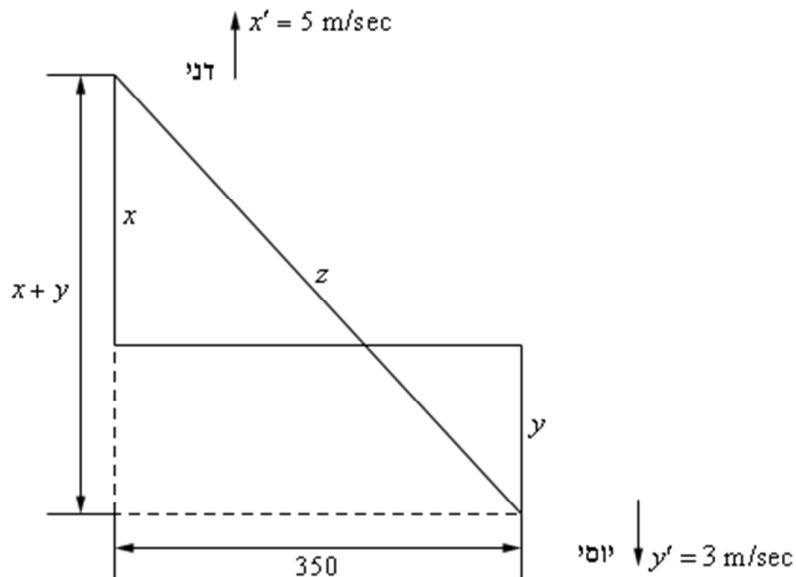
- א. באיזה קצב מתרחק קצהו של הצל של הגירפה מהעמוד כאשר היא 25 מ' מהעמוד.  
 ב. באיזה קצב מתרחק קצהו של הצל של הגירפה מהגירפה כאשר היא 25 מ' מהעמוד.



(13) פנס מונח על הקרקע, 20 מטרים מקיר. גירפה שגובהה 6 מטרים הולכת לכיוון הקיר בקצב של 2.5 מטרים לשנייה. באיזה מהירות משתנה גובהו של הצל כאשר הגירפה במרחק של 8 מטרים מהקיר? האם גובה הצל קטן או גדל באותו הזמן?



(14) דני ויוסי גרים במרחק של 350 מטרים האחד מהשני. דני יוצא מביתו ורוכב על אופניו צפונה במהירות של 5 מטרים לשנייה. 7 דקות אחר כך יוצא יוסי מביתו ורוכב על אופניו דרומה במהירות של 3 מטרים לשנייה. באיזה קצב משתנה המרחק בין דני ויוסי 25 דקות לאחר שדני יצא את ביתו. תוכל להיעזר באיור הבא:





(15) נניח שיש לנו שני נגדים המחוברים במקביל עם התנגדות  $R_1$  ו-  $R_2$  הנמדדת באוהם ( $\Omega$ ).

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

נניח ש-  $R_1$  גדל בקצב של 0.4 אוהם בדקה ו-  $R_2$  קטן בקצב של 0.7 אוהם בדקה.

באיזה קצב משתנה  $R$  כאשר :  $R_1 = 80\Omega$  ,  $R_2 = 105\Omega$  ?

### פתרונות:

(1)  $20\pi \text{ m}^2 / \text{sec}$  (2)  $-\frac{4}{3} \text{ m/sec}$  (3) א.  $0.104 \text{ rad/sec}$  ב.  $208 \text{ m/sec}$

(4)  $-0.38 \text{ cm/min}$  (5) א.  $100 \text{ Rad/hour}$  או  $-\frac{5}{\pi}$  מעלות בשנייה. ב.  $115.4 \text{ m/sec}$

(6) 0.75 סמ"ר בשנייה. (7) ב.  $\frac{4L}{9\pi}$  (8) א.  $-\frac{60}{7}$  יחידות לשנייה. ב. יורד.

(9) א.  $R(t) = \frac{12}{2t+3}$  ב.  $t = 4.5 \text{ hours}$  (11)  $0.25 \text{ m/sec}$

(12) א.  $3.6923 \text{ m/sec}$  ב.  $1.6923 \text{ m/sec}$  (13)  $2.0833 \text{ m/sec}$  (14)  $7.9958 \text{ m/sec}$

(15) קטן בקצב של  $0.002045 \Omega / \text{min}$

## פרק 15 - משפט לגרנג'ו

(1) הוכח את אי השוויונים הבאים בתחום הרשום לידם:

$$(0 < a < b) \quad \frac{b-a}{b} < \ln\left(\frac{b}{a}\right) < \frac{b-a}{a} \quad (1)$$

$$(0 < a < b) \quad \frac{b-a}{2\sqrt{b}} < \sqrt{b} - \sqrt{a} < \frac{b-a}{2\sqrt{a}} \quad (2)$$

$$\left(0 < a < b < \frac{\pi}{2}\right) \quad \frac{b-a}{\cos^2 a} < \tan b - \tan a < \frac{b-a}{\cos^2 b} \quad (3)$$

$$(a < b) \quad (a-b)e^{-a} < e^{-b} - e^{-a} < (a-b)e^{-b} \quad (4)$$

$$(0 < a < b) \quad \frac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{1+a^2} \quad (5)$$

$$(0 < a < b < 1) \quad \frac{b-a}{\sqrt{1-a^2}} < \arcsin b - \arcsin a < \frac{b-a}{\sqrt{1-b^2}} \quad (6)$$

$$(0 < a < b) \quad \frac{b-a}{\sqrt{1+b^2}} < \frac{a \operatorname{rcsinh}(b) - a \operatorname{rcsinh}(a)}{b-a} < \frac{b-a}{\sqrt{1+a^2}} \quad (7)$$

$$(0 < a < b < 1) \quad \frac{b-a}{1-a^2} < a \operatorname{rc tanh}(b) - \operatorname{arc tanh}(b) < \frac{b-a}{1-b^2} \quad (8)$$

$$(0 < a < b) \quad \sqrt[n]{b} \cdot \frac{b-a}{n \cdot b} < \sqrt[n]{b} - \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{a} \cdot \frac{b-a}{n \cdot a} \quad (9)$$

$$(1 < a < b) \quad \frac{2b(b-a)}{b^2+1} < \ln\left(\frac{b^2+1}{a^2+1}\right) < \frac{2a(b-a)}{a^2+1} \quad (10)$$

(2) הוכח את אי השוויונים הבאים בתחום הרשום לידם:

$$(x > 0) \quad \frac{x}{1+x^2} < \arctan x < x \quad (2) \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right) \quad x < \tan x < \frac{x}{\cos^2 x} \quad (1)$$

$$(x > 0) \quad \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} < a \operatorname{rcsinh}(x) < x \quad (4) \quad (0 < x < 1) \quad x < \arcsin x < \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (3)$$

$$(x > 0) \quad \frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x \quad (6) \quad (0 < x < 1) \quad x < a \operatorname{rc tanh}(x) < \frac{x}{1-x^2} \quad (5)$$

$$(x > 0) \quad \sin x \leq x \quad (8) \quad (x > 0) \quad 1+x < e^x < 1+xe^x \quad (7)$$

$$(0 < x < 1) \quad \arctan x > \ln(1+x) \quad (*10) \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{3}\right) \quad \tan x < 4x \quad (9)$$

(3) הוכח את אי השוויונים הבאים:

$$|\cos x_2 - \cos x_1| \leq |x_2 - x_1| \quad (2) \quad |\sin x_2 - \sin x_1| \leq |x_2 - x_1| \quad (1)$$

$$|\tan y - \tan x| \leq 8 |\sin x - \sin y| \quad (*4) \quad |\arctan y - \arctan x| < |y - x| \quad (3)$$

(4) הוכח את אי השוויונים הבאים :

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} + 1 < \sqrt{2} < 1.5 \quad (2) \qquad \frac{1}{3} < \ln\left(\frac{3}{2}\right) < \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{15} + \frac{\pi}{6} < \arcsin(0.6) < \frac{1}{8} + \frac{\pi}{6} \quad (4) \qquad \frac{3}{25} + \frac{\pi}{4} < \arctan\left(\frac{4}{3}\right) < \frac{1}{6} + \frac{\pi}{4} \quad (3)$$

(5) א. תהי  $f(x)$  פונקציה גזירה לכל  $x$  המקיימת  $|f'(x)| \leq 5$ .

ידוע כי  $f(1) = 3$ ,  $f(4) = 18$ . הוכח כי  $f(2) = 8$ .

ב. תהי  $f(x)$  פונקציה גזירה לכל  $x$  המקיימת  $|f'(x)| \leq 7$ .

ידוע כי  $f(1) = 3$ ,  $f(4) = 18$ . הוכח כי  $4 \leq f(2) \leq 10$ .

\* תרגיל 2 סעיף 10 ותרגיל 3 סעיף 4 עוסקים במשפט קושי שהוא הכללה של משפט לגרנג'י, ולפיכך רלוונטיים רק אם למדת משפט זה.

## פרק 16 - טור טיילור/מקלורן

(1) מצא את הפיתוח לטור טיילור סביב  $x = 0$  (טור מקלורן) של הפונקציות הבאות:  
\* תוכל להיעזר בפיתוחים הידועים לטור מקלורן המופיעים בנספח שבעמוד האחרון.

$$f(x) = \sinh x \quad (3) \qquad f(x) = x^2 e^{-4x} \quad (2) \qquad f(x) = \sin 2x \quad (1)$$

$$f(x) = 2^x \quad (6) \qquad f(x) = \cos^2 x \quad (5) \qquad f(x) = \sin^2 x \quad (4)$$

$$f(x) = \arcsin x \quad (9) \qquad f(x) = \ln(2 - 3x + x^2) \quad (8) \qquad f(x) = x \cos(4x^2) \quad (7)$$

$$f(x) = \frac{1}{1+9x^2} \quad (12) \qquad f(x) = \frac{3}{1-x^4} \quad (11) \qquad f(x) = \frac{1}{1+x} \quad (10)$$

$$f(x) = \frac{x}{9+x^2} \quad (15) \qquad f(x) = \frac{x}{4x+1} \quad (14) \qquad f(x) = \frac{1}{x-5} \quad (13)$$

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \quad (18) \qquad f(x) = \frac{7x-1}{3x^2+2x-1} \quad (17) \qquad f(x) = \frac{3}{x^2+x-2} \quad (16)$$

$$f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} \quad (21) \qquad f(x) = \ln(1-x) \quad (20) \qquad f(x) = \ln(1+x) \quad (19)$$

$$f(x) = \arctan(x/3) \quad (24) \qquad f(x) = \frac{x^2}{(1-2x)^2} \quad (23) \qquad f(x) = \ln(5-x) \quad (22)$$

הערות: לפתרון סעיפים 16,17 עליך להכיר את הנושא פירוק לשברים חלקיים.  
לפתרון סעיפים 18,19,23,24 עליך להכיר את הנושא גזירה ואינטגרציה של טורי מקלורן.

(2) מצא את הפיתוח לטור טיילור סביב  $x = x_0$  של הפונקציות הבאות:

$$\left(x_0 = \frac{\pi}{2}\right) f(x) = \sin x \quad (3) \quad \left(x_0 = 2\right) f(x) = \frac{1}{x} \quad (2) \quad \left(x_0 = 1\right) f(x) = \ln x \quad (1)$$

(3) מצא את ארבעת האיברים הראשונים, השונים מאפס, בפיתוח לטור מקלורן של הפונקציות הבאות (נדרש ידע בכפל וחילוק של פולינומים):

$$f(x) = \frac{\sin x}{e^x} \quad (3) \quad f(x) = \tan x \quad (2) \quad f(x) = e^{-x^2} \cos x \quad (1)$$

(4) חשב את סכום הטורים הבאים :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot n!} \quad (3) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n!} \quad (2) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \quad (1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \quad (6) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \quad (5) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!} \quad (4)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}(n+1)} \quad (9) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \quad (8) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \quad (7)$$

(5) חשב את ערך הגבול בתרגילים הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^3} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^5} \quad (1)$$

(6) חשב בשגיאה הקטנה מ- 0.001 :

$$\arctan 0.25 \quad (3) \quad \sin 3^\circ \quad (2) \quad \frac{1}{e} \quad (1)$$

(7) חשב בעזרת  $n$  איברים ראשונים (שונים מאפס) בפיתוח לטור מקלורן והערך את השגיאה בחישוב :

$$(n=4) \ln 1.5 \quad (3) \quad (n=1) \cos 4^\circ \quad (2) \quad (n=3) \frac{1}{\sqrt{e}} \quad (1)$$

(8)

א. מהי השגיאה המקסימלית בקירוב  $\sin x \cong x - \frac{x^3}{3!}$  עבור  $|x| \leq \frac{\pi}{6}$ .ב. מהי השגיאה המקסימלית בקירוב  $\ln(1+x) \cong x$  עבור  $|x| < 0.01$ .ג. מהי השגיאה המקסימלית בקירוב  $\cos x \cong 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$  עבור  $|x| \leq 0.2$ .

(9)

א. עבור אילו ערכי  $x$ ,  $\sin x \cong x - \frac{x^3}{3!}$  בשגיאה הקטנה מ- 0.001.ב. עבור אילו ערכי  $x$ ,  $\arctan x \cong x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7}$  בשגיאה הקטנה מ- 0.01.

(10) חשב בקירוב את האינטגרלים הבאים בשגיאה הקטנה מ-  $\varepsilon$ .

$$(\varepsilon = 0.001) \int_0^{0.1} \frac{\ln(1+x)}{x} dx \quad (2) \quad (\varepsilon = 0.0001) \int_0^{0.2} \frac{\sin x}{x} dx \quad (1)$$

$$(\varepsilon = 0.0001) \int_0^{0.5} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx \quad (3)$$

### נוסחת השארית של לגרנז'

(11) רשום את נוסחת טיילור מסדר שני לפונקציה  $f(x) = \sqrt[3]{64+x}$  סביב  $x_0 = 0$ ,

כולל שארית לגרנז'. חשב בעזרת הנוסחה שקיבלת את  $\sqrt[3]{66}$  והערך את השגיאה בקירוב.

(12) רשום את נוסחת טיילור מסדר ראשון לפונקציה  $f(x) = \tan x$  סביב  $x_0 = 0$ ,

כולל שארית לגרנז'. חשב בעזרת הנוסחה שקיבלת את  $\tan 0.1$  והערך את השגיאה בקירוב.

(13) רשום את נוסחת טיילור מסדר שני לפונקציה  $f(x) = \sqrt{x+4}$  סביב  $x_0 = 0$ ,

כולל שארית לגרנז'. חשב בעזרת הנוסחה שקיבלת את  $\sqrt{5}$  והערך את השגיאה בקירוב.

(14) רשום את נוסחת טיילור מסדר שני לפונקציה  $f(x) = \sqrt[4]{x}$  סביב  $x_0 = 16$ ,

כולל שארית לגרנז'. חשב בעזרת הנוסחה שקיבלת את  $\sqrt[4]{15}$  והערך את השגיאה בקירוב.

### הערה לגבי קירובים:

אם מבקשים קירוב שהוא מדויק ל-  $n$  ספרות אחרי הנקודה, אז עלינו לדרוש, שהערך המוחלט של השגיאה יהיה קטן מ-  $0.5 \times 10^{-n}$ . למשל דיוק של שלוש ספרות אחרי הנקודה משמעותו שהערך המוחלט של השגיאה יהיה קטן מ-  $0.5 \times 10^{-3} = 0.0005$ . אני בספר לא השתמשתי בניסוח זה, אך יש המשתמשים בו.

**פתרונות:**

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (-\infty < x < \infty) \quad (3)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4^n x^{n+2}}{n!} \quad (-\infty < x < \infty) \quad (2)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (-\infty < x < \infty) \quad (1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln 2)^n x^n}{n!} \quad (-\infty < x < \infty) \quad (6)$$

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!} \quad (-\infty < x < \infty) \quad (5)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!} \quad (-\infty < x < \infty) \quad (4)$$

$$x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (-1 < x < 1) \quad (9)$$

$$\ln 2 - \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (-1 \leq x < 1) \quad (8)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4^{2n} x^{4n+1}}{(2n)!} \quad (-\infty < x < \infty) \quad (7)$$

$$(|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} 3x^{4n} \quad (11)$$

$$(|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad (10)$$

$$(|x| < 5) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{5^{n+1}} x^n \quad (13)$$

$$(|x| < \frac{1}{3}) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 9^n x^{2n} \quad (12)$$

$$(|x| < 3) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}} \quad (15)$$

$$(|x| < \frac{1}{4}) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 4^n x^{n+1} \quad (14)$$

$$(|x| < \frac{1}{3}) \sum_{n=0}^{\infty} (2(-1)^n - 3^n) x^n \quad (17)$$

$$(|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} - 1\right) x^n \quad (16)$$

$$(-1 < x \leq 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \quad (19)$$

$$(|x| < 1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot n \cdot x^{n-1} \quad (18)$$

$$(|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^{2n+1}}{2n+1} \quad (21)$$

$$(-1 \leq x < 1) \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (20)$$

$$(|x| < \frac{1}{2}) \sum_{n=0}^{\infty} 2^n (n+1) x^{n+2} \quad (23)$$

$$(-5 \leq x < 5) \ln 5 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{5^{n+1} (n+1)} \quad (22)$$

$$(24)$$

$$(25)$$

$$(26)$$

$$(27)$$

$$(28)$$

$$(29)$$

$$(30)$$

$$(31)$$

$$(32)$$

$$(33)$$

$$(34)$$

$$(35)$$

$$(36)$$

$$(37)$$

$$(38)$$

$$(39)$$

$$(40)$$

$$(41)$$

$$(42)$$

$$(43)$$

$$(44)$$

$$(45)$$

$$(46)$$

$$(47)$$

$$(48)$$

$$(49)$$

$$(50)$$

$$(51)$$

$$(52)$$

$$(53)$$

$$(54)$$

$$(55)$$

$$(56)$$

$$(57)$$

$$(58)$$

$$(59)$$

$$(60)$$

$$(61)$$

$$(62)$$

$$(63)$$

$$(64)$$

$$(65)$$

$$(66)$$

$$(67)$$

$$(68)$$

$$(69)$$

$$(70)$$

$$(71)$$

$$(72)$$

$$(73)$$

$$(74)$$

$$(75)$$

$$(76)$$

$$(77)$$

$$(78)$$

$$(79)$$

$$(80)$$

$$(81)$$

$$(82)$$

$$(83)$$

$$(84)$$

$$(85)$$

$$(86)$$

$$(87)$$

$$(88)$$

$$(89)$$

$$(90)$$

$$(91)$$

$$(92)$$

$$(93)$$

$$(94)$$

$$(95)$$

$$(96)$$

$$(97)$$

$$(98)$$

$$(99)$$

$$(100)$$

$$\begin{array}{lll}
 & & (3) \\
 x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 + \dots (3) & x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \dots (2) & 1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{25}{24}x^4 - \frac{331}{720}x^6 + \dots (1) \\
 & & (4) \\
 \ln \frac{3}{2} (9) \quad \ln 2 (8) \quad \cos 1 (7) \quad \sin 1 (6) \quad \pi/4 (5) \quad 2e (4) \quad \sqrt{e} (3) \quad e^{-2} (2) \quad e (1) & & \\
 & & (5) \\
 & 1/3 (3) & 1/3 (2) \quad 1/120 (1) \\
 & & (6) \\
 & 47/192 (3) & \pi/60 (2) \quad 53/144 (1) \\
 & & (7) \\
 \frac{1}{160} \text{ בשגיאה הקטנה מ-} \frac{77}{192} (3) & \frac{\pi \cdot \pi}{4050} \text{ בשגיאה הקטנה מ-} 1 (2) & \frac{1}{48} \text{ בשגיאה הקטנה מ-} \frac{5}{8} (1) \\
 & & (8) \\
 (0.2)^6 / 6! (2) & (0.01)^2 / 2 (2) & (\pi/6)^5 / 5! (1) \\
 & & (9) \\
 |x| < \sqrt[9]{9/100} (2) & & |x| < \sqrt[5]{3/25} (1) \\
 & & (10) \\
 143/576 (3) & 39/400 (2) & 449/2250 (1)
 \end{array}$$



**פרק 17 - סדרות**

(1) חשב את הגבולות הבאים :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + 2n^2 + 6}{3n^3 + 10n} \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 2}{n^2 + 1000n} \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (e^{-n})^{\ln n} \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{n} \quad (6)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2 - 5n + 6}{2n + 10} - \frac{n}{2} \right) \quad (5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + 2n^2 + 6}{3n^5 + 10n} \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{16^n + 4^{n+1}}{2^{4n+2} + 2^{n+3}} \quad (9)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{3n-3}}{\sqrt{4n+1} - \sqrt{5n-1}} \quad (8)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^4 + 2n^2 + 6 + 27n^6}}{\sqrt{3n^3 + 10n + 4n^4}} \quad (7)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left( \frac{3n^3 - 5n - 1}{n^3 - 2n^2 + 1} \right) \quad (12)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4n^2 + 2}{n^2 + 1000n}} \quad (11)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 9^n + 3^{n+1}}{81^{0.5n} + 3^{n+3}} \quad (10)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 5n} - n) \quad (15)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[5]{\frac{an+1}{bn+2}} \quad (14)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{n^4 + 2n^2 + 6}{3n^4 + 10n}} \quad (13)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^4 + n^2 + 1} - n^2) \quad (18)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n + 1} - n) \quad (17)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + kn} - n) \quad (16)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right)^n \quad (21)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{2n} \right)^n \quad (20)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + an} - \sqrt{n^2 + bn}) \quad (19)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n+3}{2n-3} \right)^n \quad (24)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right)^{n^2-1} \quad (23)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+2}{n} \right)^n \quad (22)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \tan \frac{1}{n} \right)^n \quad (27)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2 + 4n + 1}{n^2 + 2n + 2} \right)^{10n} \quad (26)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2 + n + 1}{n^2 + n + 4} \right)^{4n^2} \quad (25)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + \sin n}{4n + \cos n} \quad (30)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(2n+1)}{n} \quad (29)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} \quad (28)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n} \quad (33)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + \arctan(2n-3)}{4n + \arctan(n - \ln n)} \quad (32)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + n + \sin 2n}{n^2 + \cos 3n} \quad (31)$$

**הערה חשובה מאוד !**

בפתרון המלא, יופיע במקום המשתנה  $n$ , המשתנה  $x$ . יש להתייחס אל  $x$  כאל מספר טבעי ! בנוסף, יש לזכור שסדרה היא פונקציה (מהטבעיים לממשיים) ולכן לעיתים אומר פונקציה במקום סדרה.

(2) חשב את הגבולות הבאים :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(n!)^2}} \quad (3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} \quad (2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + 2^{4n + \frac{1}{n}}} \quad (6) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{(2n)!}}{2n} \quad (5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{4n} \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^3 + n^2 + 1} \quad (9) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + \dots + n}{n^2 + 4n + 1} \quad (8) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \sin\left(\frac{4}{n}\right) \quad (7)$$

$$4^n \sin \frac{1}{n} \quad (12) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{n + (-1)^n}{n} \right]^n \quad (11) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi n}{2} \quad (10)$$

(3) חשב את הגבולות הבאים :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \quad (2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right) \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) \quad (4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[n]{n}}{n} \quad (3)$$

\* רמזים: סעיף 1 -  $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ . סעיף 2 - הוכח כי  $a_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ .

(4) בתרגילים הבאים נתונה סדרה בעזרת נוסחת נסיגה (רקורסיה).

הוכח שהסדרה מתכנסת וחשב את גבולה.

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{1}{a_n} \right), a_1 = 2 \quad (3) \quad a_{n+1} = \sqrt{2a_n - 1}, a_1 = 2 \quad (2) \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}, a_1 = \sqrt{2} \quad (1)$$

(5) נתונה הסדרה  $a_{n+1} = 2a_n + 3a_{n-1}$ ,  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 1$ .א. 1. נגדיר סדרה חדשה  $b_n$  על ידי:  $b_n = \frac{a_n}{a_{n+1}}$ . הוכח שהגבול  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  קיים וחשב אותו.2. בעזרת התוצאה של הסעיף הקודם הוכח שהסדרה  $a_n$  שואפת לאינסוף.ב. 1. מצא ביטוי סגור עבור הסדרה  $a_n$  (כלומר נוסחה לא רקורסיבית).

2. ענה שוב על סעיף א.1. בעזרת הביטוי הסגור שמצאת.

3. הוכח באינדוקציה שהביטוי הסגור שמצאת בסעיף הקודם הוא אכן נכון.

(6) על סמך ההגדרה של גבול של סדרה הוכח כי:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + \sin n}{2n^2 + 3} = \frac{1}{2} \quad \text{ג.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} = 1 \quad \text{ב.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{4n+3} = \frac{1}{2} \quad \text{א.}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot \cos^2 n}{n^2 + 2} = 0 \quad \text{ו.} & \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - 2n + 1}{2n^2 + n + 3} = 2 \quad \text{ה.} & \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + (-1)^n}{n^2 + 1} = 1 \quad \text{ד.} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 - n^2 + 5n + 6 = \infty \quad \text{ט.} & \quad \lim_{n \rightarrow \infty} 2n + 4 = \infty \quad \text{ח.} & \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 4n} - n) = 2 \quad \text{ז.} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \log \frac{1}{n} = -\infty \quad \text{יב.} & \quad \lim_{n \rightarrow \infty} e^{2n+1} = \infty \quad \text{יא.} & \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \log(2n + 5) = \infty \quad \text{י.} \end{aligned}$$

(7) הוכח או הפרך :

- (1) אם  $a_n$  סדרה חסומה אז יש לה גבול.
- (2) אם  $b_n$  סדרה לא חסומה אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$  או  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$ .
- (3) אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} |c_n| = k$  אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = k$  או  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = -k$ .
- (4) אם  $d_n$  סדרה עולה אז היא לא חסומה.
- (5) אם ל- $a_n$  ו- $b_n$  אין גבול אז גם ל- $(a_n + b_n)$  וגם ל- $(a_n \cdot b_n)$  אין גבול.
- (6) אם ל- $a_n$  ו- $b_n$  אין גבול אז גם ל- $(a_n / b_n)$  אין גבול.
- (7) אם  $a_n$  מתכנסת ו- $b_n$  מתבדרת, אז  $(a_n \cdot b_n)$  מתבדרת.
- (8) אם  $a_n$  מתכנסת ו- $b_n$  מתבדרת, אז  $(a_n \cdot b_n)$  מתכנסת.
- (9) אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{L}$  או  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^2 = L$ .
- (10) אם  $a_n < b_n$  לכל  $n$  אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n < \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ .
- (11) אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$  ואם  $b_n$  חסומה אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \infty$ .
- (12) אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = k$  ואם  $a_n < 1$  לכל  $n$  אז  $k < 1$ .
- (13) אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$  אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^n = 1$ .

**פתרונות:**

- (1) (1) 0 (2) 4 (3)  $\infty$  (4) 0 (5) -5 (6) 1 (7) 1.5 (8)  $\frac{1-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$  (9) 0.25 (10) 4 (11) 2
- (12)  $\ln 3$  (13)  $e^{1/3}$  (14)  $(b \neq 0) \Leftrightarrow (\lim a_n = \sqrt[5]{a/b})$ ,  $(\lim a_n = \infty) \Leftrightarrow (a > 0, b = 0)$
- $(\lim a_n = -\infty) \Leftrightarrow (a < 0, b = 0)$  (15) 2.5 (16)  $\frac{k}{2}$  (17) 0.5 (18) 0.5 (19)  $\frac{a-b}{2}$  (20)  $e^{0.5}$
- (21) 1 (22)  $e^{-1}$  (23)  $e^{-1}$  (24)  $e^3$  (25)  $e^{-12}$  (26)  $e^{30}$  (27)  $e$  (28) 0 (29) 0 (30) 0.75 (31) 3
- (32)  $\frac{3}{4}$  (33) 4 (2) (1) 0 (2) 0 (3) 4 (4)  $\frac{1}{4e}$  (5)  $\infty$  (6) 1 (7) 4 (8) 0.5 (9)  $\frac{1}{3}$
- (10) אין גבול. (11) אין גבול. (12)  $\infty$  (3) (1) 1 (2) 0 (3) 1 (4) 1 (4) (1) הגבול 2.
- (2) הגבול 1. (3) הגבול 1. (5) א.1. הגבול  $\frac{1}{3}$ . ב.1.  $a_n = \frac{1}{6} \cdot 3^n - \frac{1}{2} \cdot (-1)^n$

**פרק 18 - האינטגרל הלא מסוים (אינטגרל מיידי)**

חשב את האינטגרלים הבאים :

לפתרון מלא בסרטון פלאש היכנסו ל- [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

כתב ופתר - גיא סלומון ©

$$\int \frac{1}{x^2} dx \quad (3) \qquad \int x^4 dx \quad (2) \qquad \int 4dx \quad (1)$$

$$\int 4x^{10} dx \quad (6) \qquad \int \frac{1}{x\sqrt{x}} dx \quad (5) \qquad \int \sqrt{x} dx \quad (4)$$

$$\int (x^2 + 1)^2 dx \quad (9) \qquad \int \left(\frac{3}{x^4} + 2\sqrt[3]{x}\right) dx \quad (8) \qquad \int (2x^2 - x + 1) dx \quad (7)$$

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx \quad (12) \qquad \int \frac{1+2x^2+x^4}{x^2} dx \quad (11) \qquad \int (x^2 + 1)(x + 2) dx \quad (10)$$

$$\int \frac{4}{(x-2)^5} dx \quad (15) \qquad \int (x^2 - 2x + 1)^{10} dx \quad (14) \qquad \int (4x+1)^{10} dx \quad (13)$$

$$\int \frac{x}{(x-1)^4} dx \quad (18) \qquad \int \frac{10}{\sqrt{2x+4}} dx \quad (17) \qquad \int \sqrt[3]{4x-10} dx \quad (16)$$

$$\int \frac{1}{4x} dx \quad (21) \qquad \int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}+1} \quad (20) \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}} \quad (19)$$

$$\int \frac{1}{4x-1} dx \quad (24) \qquad \int \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 dx \quad (23) \qquad \int \frac{1+x+x^2}{x} dx \quad (22)$$

$$\int (e^{4x} + e^{-x}) dx \quad (27) \qquad \int \frac{4x+1}{x+2} dx \quad (26) \qquad \int \frac{x+3}{x+2} dx \quad (25)$$

$$\int \left(4\sqrt{e^x} + \frac{1}{\sqrt[3]{e^{4x}}}\right) dx \quad (30) \qquad \int \frac{2^x + 4^{2x} + 10^{3x}}{5^x} dx \quad (29) \qquad \int (e^{x+1})^2 dx \quad (28)$$

$$\int \frac{x^2}{1-x^2} dx \quad (33) \qquad \int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx \quad (32) \qquad \int \frac{1}{1+4x^2} dx \quad (31)$$

$$\int 2 \sin 4x + \cos x dx \quad (36) \qquad \int \sin \frac{x}{2} dx \quad (35) \qquad \int \cos 4x dx \quad (34)$$

\* בדוק תשובתך על ידי גזירה!

### פרק 19 - האינטגרל הלא מסויים (הנגזרת כבר בפנים)

חשב את האינטגרלים הבאים:

לפתרון מלא בסרטון פלאש היכנסו ל- [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

כתב ופתר - גיא סלומון ©

$$\int \frac{x^2}{x^3+1} dx \quad (3)$$

$$\int \cot x dx \quad (2)$$

$$\int \frac{2x}{x^2+1} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{e^{x+2}}{e^x+1} dx \quad (6)$$

$$\int \frac{1}{x \ln x} dx \quad (5)$$

$$\int \tan x dx \quad (4)$$

$$\int e^{-2x^2} x dx \quad (9)$$

$$\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx \quad (8)$$

$$\int e^{x^2} 2x dx \quad (7)$$

$$\int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx \quad (12)$$

$$\int \cos(\sin x) \cdot \cos x dx \quad (11)$$

$$\int \cos(2x^2+1) \cdot 4x dx \quad (10)$$

$$\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx \quad (15)$$

$$\int \sin(x^2+1)x dx \quad (14)$$

$$\int \cos(10x^4+1)x^3 dx \quad (13)$$

$$\int \frac{\ln(\tan x)}{\cos^2 x} dx \quad (18)$$

$$\int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx \quad (17)$$

$$\int \frac{\ln x}{x} dx \quad (16)$$

$$\int \sqrt{x^2+1} \cdot 2x dx \quad (21)$$

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{2 \sin x}} dx \quad (20)$$

$$\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} dx \quad (19)$$

$$\int \frac{\sqrt{\arctan x}}{1+x^2} dx$$

$$\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx \quad (23)$$

$$\int \sqrt{x^3+4} \cdot x^2 dx \quad (22)$$

\* הערה : את האינטגרלים בפרק זה ניתן לפתור גם בעזרת שיטת ההצבה.  
\* בדוק תשובתך על ידי גזירה!

## פרק 20 - האינטגרל הלא מסויים (אינטגרציה בחלקים)

(1) חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\int x \sin x dx \quad (3) \qquad \int x^4 \ln x dx \quad (2) \qquad \int x e^x dx \quad (1)$$

$$\int x^2 \sin 4x dx \quad (5) \qquad \int x \cos 2x dx \quad (4) \qquad \int (x^2 + 2x + 3) \ln x dx \quad (4)$$

$$\int \ln \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx \quad (8) \qquad \int \ln x dx \quad (7) \qquad \int x^2 e^{-4x} dx \quad (6)$$

$$\int x \cdot \ln \sqrt[5]{x-2} dx \quad (11) \qquad \int \arcsin x \quad (10) \qquad \int \arctan x \quad (9)$$

$$\int x \arctan x \quad (14) \qquad \int \frac{\ln x}{x^2} dx \quad (13) \qquad \int \frac{x}{\cos^2 x} dx \quad (12)$$

$$\int \left( \frac{\ln x}{x} \right)^2 dx \quad (17) \qquad \int \ln^2 x dx \quad (16) \qquad \int x^2 \ln(x^2 + 1) dx \quad (15)$$

$$\int \sqrt{1-x^2} dx \quad (20) \qquad \int e^{2x} \sin 4x dx \quad (19) \qquad \int e^x \cos x dx \quad (18)$$

$$\int (x+1)^4 \cdot \sqrt{x+2} dx \qquad \int x \tan^2 x dx \quad (22) \qquad \int \frac{x e^x}{(x+1)^2} dx \quad (21)$$

(2) א. מצא נוסחת נסיגה עבור  $\int x^n e^x dx$  באשר  $n$  טבעי. ב. חשב  $\int x^4 e^x dx$ .

(3) א. מצא נוסחת נסיגה עבור  $\int \cos^n x dx$  באשר  $n$  טבעי. ב. חשב  $\int \cos^4 x dx$ .

(4) א. מצא נוסחת נסיגה עבור  $\int \sin^n x dx$  באשר  $n$  טבעי. ב. חשב  $\int \cos^4 x dx$ .

(5) א. מצא נוסחת נסיגה עבור  $\int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$  באשר  $n$  טבעי. ב. חשב  $\int \frac{1}{(1+x^2)^4} dx$ .

\* בדוק תשובתך על ידי גזירה!

### פרק 21 - האינטגרל הלא מסויים (שיטת ההצבה)

(1) חשב את האינטגרלים הבאים (הצבות רגילות):

$$\int \frac{2x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx \quad (3) \quad \int \sqrt{x^3+4} \cdot x^5 dx \quad (2) \quad \int \frac{2x}{(x^2+1)^2} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} dx \quad (6) \quad \int \frac{1}{x \ln^4 x} dx \quad (5) \quad \int \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx \quad (4)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x(1+x)}} dx \quad (9) \quad \int e^{\sqrt[3]{x}} dx \quad (8) \quad \int e^{x^2} x^3 dx \quad (7)$$

$$\int \frac{\cos^2(\ln x)}{x} dx \quad (12) \quad \int x^3(3x^2-1)^{14} dx \quad (11) \quad \int \cos(x^2+1) \cdot 2x^3 dx \quad (10)$$

$$\int \frac{x^3 dx}{x^8+2} \quad (15) \quad \int \ln^3 x dx \quad (14) \quad \int \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} dx \quad (13)$$

$$\int \frac{dx}{x \cdot \ln x \cdot \ln(\ln x)} \quad (18) \quad \int \frac{\arctan^2 x}{1+x^2} dx \quad (17) \quad \int \frac{\ln^4 x}{x} dx \quad (16)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}} dx \quad (21) \quad \int \frac{x^7}{(1-x^4)^2} dx \quad (20) \quad \int \arctan \sqrt{x} dx \quad (19)$$

$$\int x^5 \cdot \sqrt[3]{x^3+1} dx \quad (24) \quad \int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})} dx \quad (23) \quad \int \cos(\ln x) dx \quad (22)$$

**הערה:** בחלק מהתרגילים, לאחר ההצבה, תידרש לאינטגרציה בחלקים.

\* בדוק תשובתך על ידי גזירה!

## פרק 22 - האינטגרל הלא מסויים (פונקציות רציונליות)

לפתרון מלא בסרטון פלאש היכנסו ל- [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

כתב ופתר – גיא סלומון ©

(1) חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{dx}{x^2-4} \quad (3) \quad \int \frac{2x+5}{(x^2-2x+1)^4} dx \quad (2) \quad \int \frac{x+1}{(x-4)^2} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{x^2+x-1}{x^3-x} dx \quad (5) \quad \int \frac{x}{x^2+5x+6} dx \quad (4) \quad \int \frac{2-x}{x^2+5x} dx \quad (4)$$

$$\int \frac{8x}{(x-2)^2(x+2)} dx \quad (8) \quad \int \frac{10x}{x^4-13x^2+36} dx \quad (7) \quad \int \frac{6x^2+4x-6}{x^3-7x-6} dx \quad (6)$$

$$\int \frac{dx}{(x^2-2x+1)(x^2-4x+4)} \quad (11) \quad \int \frac{9x+36}{x^3+6x^2+9x} dx \quad (10) \quad \int \frac{5-x}{x^3+x^2} dx \quad (9)$$

$$\int \frac{2x^2+x-1}{(x^2+1)(x-3)} dx \quad (14) \quad \int \frac{1}{x^2+x+1} dx \quad (13) \quad \int \frac{1}{x^2+2x+3} dx \quad (12)$$

$$\int \frac{1}{x(x^2+1)^2} dx \quad (17) \quad \int \frac{3}{(x^2+1)(x^2+4)} dx \quad (16) \quad \int \frac{2x^2+2x+1}{(x^2+1)(x+2)} dx \quad (15)$$

$$\int \frac{x^4+2x^3-10x^2-8x}{x+4} dx \quad (20) \quad \int \frac{3x^3-5x^2+4x-2}{x-1} dx \quad (19) \quad \int \frac{25x^2}{(x-1)(x^2+4)^2} dx \quad (18)$$

$$\int \frac{x^4-4x^2+x+1}{x^2-4} dx \quad (23) \quad \int \frac{x^4-2x^3+x^2+x}{(x-1)^2} dx \quad (22) \quad \int \frac{12x^3-11x^2+6x-1}{4x-1} dx \quad (21)$$

(2) חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{1}{1+\sqrt[4]{x-1}} dx \quad (3) \quad \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}} \quad (2) \quad \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x-x}} \quad (1)$$

$$\int \sqrt{1+e^x} dx \quad (6) \quad \int \frac{1}{1+e^x} dx \quad (5) \quad \int \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x+1} dx \quad (4)$$

\* בדוק תשובתך על ידי גזירה!



**פרק 23 - האינטגרל הלא מסויים (אינטגרלים טריגונומטריים והצבות**

**טריגונומטריות)**

**אינטגרלים טריגונומטריים (בעזרת זהויות בלבד)**

(1) חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{1}{\sin^2 10x} dx \quad (3) \quad \int \frac{1}{\cos^2 4x} dx \quad (2) \quad \int (\sin 2x - 4 \cos \frac{x}{3}) dx \quad (1)$$

$$\int (\sin x + \cos x)^2 dx \quad (6) \quad \int (\cos^4 x - \sin^4 x) dx \quad (5) \quad \int (\cos^2 x - \sin^2 x) dx \quad (4)$$

$$\int \frac{1}{(\sin x \cos x)^2} dx \quad (9) \quad \int \tan^2 x dx \quad (8) \quad \int \sin x \cos x \cos 2x dx \quad (7)$$

$$\int (\sin^4 x + \cos^4 x) dx \quad (12) \quad \int (\cos x \cos 2x + \sin x \sin 2x) dx \quad (11) \quad \int \sin 7x \cos 5x dx \quad (10)$$

$$\int \cos^3 x dx \quad (15) \quad \int \sin^2 4x dx \quad (14) \quad \int \cos^2 x dx \quad (13)$$

$$\int \sin^4 2x dx \quad (18) \quad \int \cos^4 x dx \quad (17) \quad \int \sin^3 4x dx \quad (16)$$

$$\int \frac{\sin 2x - \cos 2x + 1}{\sin 2x + \cos 2x + 1} dx \quad (21) \quad \int \frac{\sin 5x - \sin x}{\sin 4x - \sin 2x} dx \quad (20) \quad \int \frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x} dx \quad (19)$$

$$\int \sin^2 x \cos^4 x dx \quad (24) \quad \int \frac{1 + \cos^3 x}{\cos^2 \frac{x}{2}} dx \quad (23) \quad \int \frac{\sin^3 x}{1 - \cos x} dx \quad (22)$$

**אינטגרלים טריגונומטריים (בעזרת הצבה טריגונומטרית)**  
**זכור:**

$$\int f(\sin x) \cdot \cos x dx = \left. \begin{array}{l} \sin x = t \\ (x = \arcsin t) \end{array} \right| = \int f(t) dt$$

$$\int f(\cos x) \cdot \sin x dx = \left. \begin{array}{l} \cos x = t \\ (x = \arccos t) \end{array} \right| = \int f(t) (-dt)$$

(2) חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int \cos^3 x dx \quad (3) \quad \int (\cos^3 x + \cos x - 2) \sin x dx \quad (2) \quad \int (\sin^2 x + \sin x + 2) \cos x dx \quad (1)$$

$$\int \sin^5 x \cos^4 x dx \quad (6) \quad \int \sin^4 x \cos^5 x dx \quad (5) \quad \int \sin^3 2x dx \quad (4)$$

$$\int \frac{1}{\cos x} dx \quad (9) \quad \int \tan^5 x dx \quad (8) \quad \int \cos^5 x dx \quad (7)$$

$$\int \frac{2 \sin x}{\cos 2x + 4 \cos x + 7} dx \quad (12) \quad \int \sin 2x \cdot e^{\cos x} dx \quad (11) \quad \int \frac{dx}{\sin x} \quad (10)$$

**אינטגרלים טריגונומטריים (בעזרת הצבה טריגונומטרית)**  
**זכור:**

$$\int f(\sin x, \cos x) dx = \left. \begin{array}{l} t = \tan \frac{x}{2} \\ (x = 2 \arctan t) \end{array} \right| = \int f\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2} dt$$

(3) חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int \frac{\cos x}{2 - \cos x} dx \quad (3) \quad \int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x} \quad (2) \quad \int \frac{1}{1 + \sin x} dx \quad (1)$$

**אינטגרלים עם שורשים (בעזרת הצבה טריגונומטרית)**

$\int f(\sqrt{a^2 - x^2}) dx = \left. \begin{array}{l} x = a \sin t \\ (t = \arcsin \frac{x}{a}) \end{array} \right  = \int f(a \cos t) \cdot (a \cos t dt)$
$\int f(\sqrt{a^2 + x^2}) dx = \left. \begin{array}{l} x = a \tan t \\ (t = \arctan \frac{x}{a}) \end{array} \right  = \int f\left(\frac{a}{\cos t}\right) \cdot \left(\frac{a}{\cos^2 t} dt\right)$
$\int f(\sqrt{x^2 - a^2}) dx = \left. \begin{array}{l} x = \frac{a}{\cos t} \\ (t = \arccos \frac{a}{x}) \end{array} \right  = \int f(a \tan t) \cdot \left(\frac{-a \sin t}{\cos^2 t} dt\right)$

(4) חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\int \sqrt{4x^2 - 1} dx \quad (3)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} dx \quad (2)$$

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{4 - x^2}} \quad (1)$$

$$\int \sqrt{x^2 + 2x - 3} dx \quad (6)$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}} dx \quad (5)$$

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}} \quad (4)$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 5)^{3/2}} \quad (9)$$

$$\int \frac{dx}{(4 + x^2)^2} \quad (8)$$

$$\int \sqrt{-6x - x^2} dx \quad (7)$$

\* בדוק תשובתך על ידי גזירה!

## פרק 24 - האינטגרל המסויים

(1) חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\int_0^1 x e^{-x} dx \quad (3) \quad \int_1^2 \frac{4x+1}{2x^2+x+5} dx \quad (2) \quad \int_1^4 (x^2 - 4x + 1) dx \quad (1)$$

$$\int_0^{\pi} \cos^2 10x dx \quad (6) \quad \int_1^4 \frac{1}{x^2+4x+1} dx \quad (5) \quad \int_1^e \frac{\ln^4 x}{x} dx \quad (4)$$

$$\int_{-1}^4 \sqrt{4+|x-1|} dx \quad (8) \quad \cdot f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{x^2} & x \geq 1 \end{cases} \quad \text{כאשר} \quad \int_0^4 f(x) dx \quad (7)$$

(2) חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt[4]{\sin x}}{\sqrt[4]{\sin x} + \sqrt[4]{\cos x}} dx \quad (2) \quad \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx \quad (1)$$

(3) נתונה פונקציה רציפה  $f$ . הוכח :

$$\text{א. אם } f \text{ זוגית אזי } \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

$$\text{ב. אם } f \text{ אי-זוגית אזי } \int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

(4) חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\int_{-4}^4 \frac{\sin x + 1}{x^2 + 1} dx \quad (2) \quad \int_{-1}^1 \frac{\cos x}{x^3 + x^5} dx \quad (1)$$

(5) הוכח את אי השוויונים הבאים :

$$2 \leq \int_0^2 e^{x^2} dx \leq 2e^4 \quad (3) \quad 6 \leq \int_{-4}^2 \sqrt{1+x^2} dx \leq 6\sqrt{17} \quad (2) \quad \frac{2}{41} \leq \int_{-1}^3 \frac{dx}{1+x^4} \leq 4 \quad (1)$$

$$\frac{\pi}{14} \leq \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+4\sin^2 x} \leq \frac{\pi}{6} \quad (6) \quad 0.9 \leq \int_3^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{\ln x}} \leq 1 \quad (5) \quad \frac{1}{2} e^{-10} < \int_0^{10} \frac{e^{-x}}{x+10} dx < 1 \quad (4)$$

$$\int_0^{\pi} x^2 \arctan\left(\frac{\sin x}{x+4}\right) dx \leq \frac{\pi^4}{6} \quad (9) \quad -\frac{1}{2} \leq \int_0^1 x \cdot \sin\left(\frac{\ln x}{x+1}\right) dx \leq \frac{1}{2} \quad (8) \quad \frac{2}{9} \leq \int_{-1}^1 \frac{dx}{8+x^3} \leq \frac{2}{7} \quad (7)$$

(6) חשב את הגבולות הבאים :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4}{n^3} \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n} + \sin \frac{2}{n} + \dots + \sin \frac{n}{n}}{n} \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \right\} \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{n}{n^2 + 1^2} + \frac{n}{n^2 + 2^2} + \dots + \frac{n^2}{n^2 + n^2} \right\} \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n^2}} \right\} \quad (5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} + \dots + \sqrt{2n}}{n^{3/2}} \right\} \quad (6)$$

(7) חשב את האינטגרלים הבאים על פי ההגדרה (של רימן) :

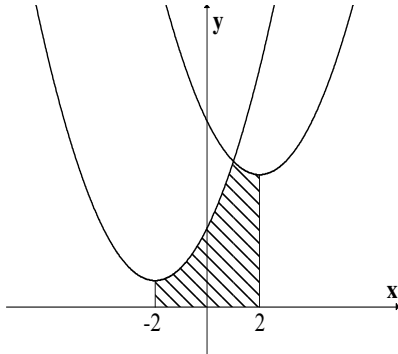
$$\int_0^{\pi} \sin x dx \quad (1) \quad \int_0^1 x^3 dx \quad (3) \quad \int_0^1 x^2 dx \quad (2) \quad \int_0^1 x dx \quad (1)$$

\* תוכל להיעזר בזהויות הבאות :

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \dots + n &= 0.5n(n+1) \\ 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \\ 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 &= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 \\ \sin \alpha + \sin 2\alpha + \dots + \sin n\alpha &= \frac{\sin \frac{n}{2} \alpha \sin \frac{n+1}{2} \alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}} \end{aligned}$$

## פרק 25 - שימושי אינטגרל המסוים (שטח ואורך קשת)

### חישוב שטחים



(1) נתונות שתי פונקציות:

$$f(x) = x^2 + 4x + 6$$

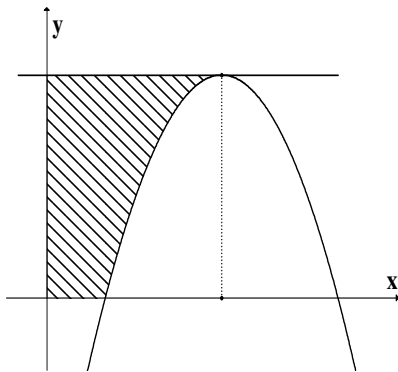
$$g(x) = x^2 - 4x + 14$$

א. מצא את נקודת החיתוך בין שתי הפונקציות.

ב. מצא את השטח המוגבל על ידי הגרפים של שתי

הפונקציות, על ידי ציר ה- $x$  ועל ידי הישרים

$x = -2$  ו- $x = 2$  (השטח המקווקו בציור).



(2) נתונה הפונקציה  $y = -x^2 + 6x - 5$  (ראה ציור).

א. מצא את השיעורים של נקודת המקסימום של הפונקציה.

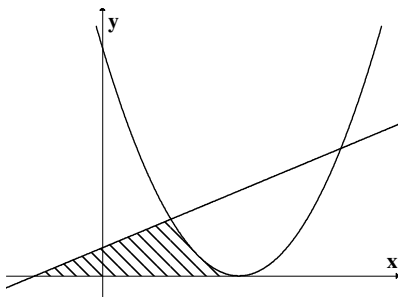
ב. מהי משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה

בנקודת המקסימום שלה?

ג. מצא את השטח המוגבל על ידי המשיק

בנקודת המקסימום, על ידי הצירים ועל ידי

גרף הפונקציה (השטח המקווקו בציור).



(3) נתונה הפונקציה  $f(x) = (x-2)^2$  ונתון הישר

$y = 0.5x + 0.5$  (ראה ציור). מצא את השטח

המוגבל על ידי גרף הפונקציה, הישר וציר ה- $x$

(השטח המקווקו בציור).

(4) נתונות הפונקציות:

$$f(x) = x^2$$

$$g(x) = -x^2 + 18$$

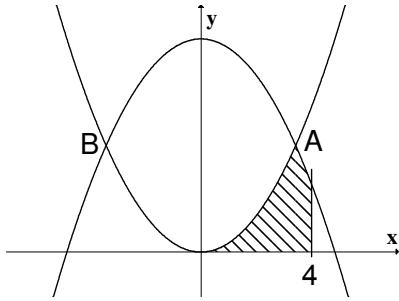
הגרפים של הפונקציות נחתכים בנקודות A ו-B

(ראה ציור).

א. מצא את שיעורי ה-x של הנקודות A ו-B.

ב. חשב את השטח ברביע הראשון המוגבל על ידי

הגרפים של שתי הפונקציות, על ידי ציר ה-x ועל

ידי הישר  $x = 4$ .

(5) נתונות שתי פונקציות:

$$y = -x^2 + 3x + 2$$

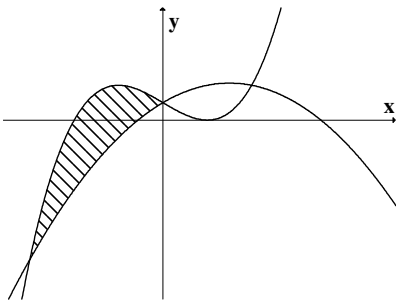
$$y = x^3 - 3x + 2$$

א. מצא את שיעורי ה-x של נקודות החיתוך בין

הגרפים של שתי הפונקציות.

ב. מצא את השטח המוגבל על ידי הגרפים של שתי

הפונקציות, השטח המקווקו בציור.

(6) נתונה הפונקציה  $f(x) = -x^2 + ax$ .הפונקציה עוברת דרך הנקודה  $A(2,8)$  (ראה ציור).

א. מצא את ערך הפרמטר a.

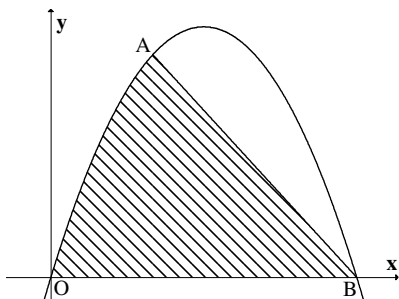
ב. הפונקציה חותכת את ציר x בנקודה  $O(0,0)$ 

ובנקודה B. מצא את שיעורי הנקודה B.

ג. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף

הפונקציה, על ידי המיתר AB ועל ידי ציר

ה-x.

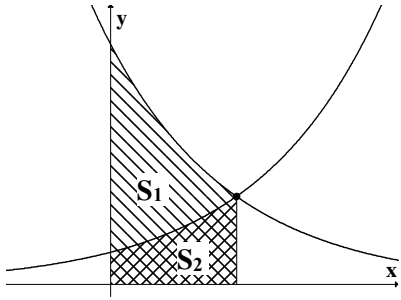


(7)

בציור שלפניך נתונות שתי הפונקציות :

$$f(x) = e^{-x+2}$$

$$g(x) = e^x$$



א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציות עם ציר  $y$ .

ב. מצא את נקודת החיתוך בין הפונקציות.

ג. חשב את היחס  $\frac{S_1}{S_2}$  (ראה ציור).

(8)

נתונה הפונקציה  $f(x) = e^{-2x}$ .

העבירו ישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה

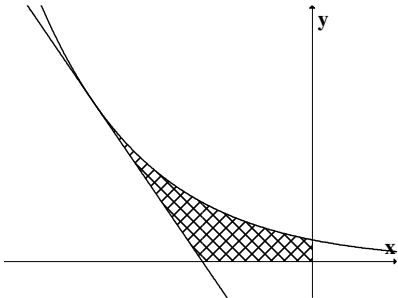
$$x = -1 \text{ (ראה ציור).}$$

א. מצא את משוואת המשיק.

ב. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה,

על ידי המשיק ועל ידי הצירים (השטח

המקווקו בציור).



(9)

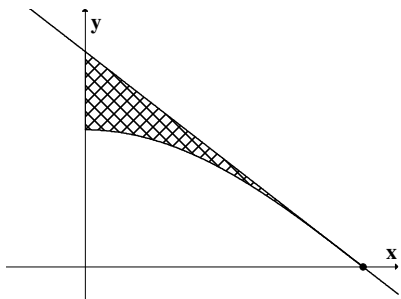
נתונה הפונקציה  $y = \cos 2x$  בתחום  $0 \leq x \leq 4$  (ראה ציור).

ישר משיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה  $x = \frac{\pi}{4}$ .

א. מצא את משוואת המשיק.

ב. מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה,

על ידי המשיק ועל ידי ציר ה- $y$ .

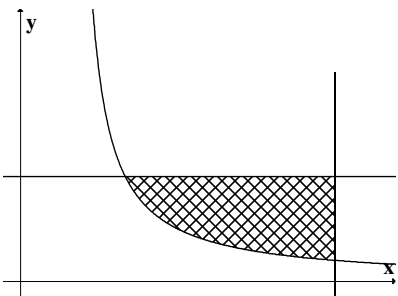


(10)

חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה

$$y = \frac{1}{2x-1} \text{ ועל ידי הישרים } x = 3 \text{ ו- } y = 1$$

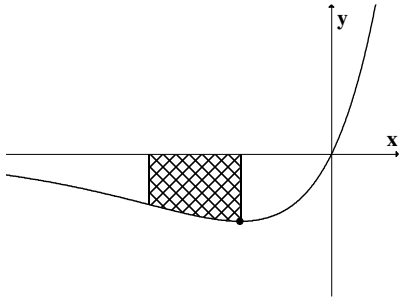
(השטח המקווקו בציור).





(11) נתונה הפונקציה  $f(x) = e^{2x} - e^x$ .

לפונקציה יש מינימום כמתואר בציור.



א. מצא את שיעור ה- $x$  של נקודת המינימום של הפונקציה.

ב. מנקודת המינימום של הפונקציה העבירו אנך

לציר ה- $x$ . נתון כי השטח, המוגבל על ידי גרף

הפונקציה, על ידי ציר ה- $x$ , על ידי האנך ועל

ידי הישר  $x=a$ , שווה ל- $3e^{2a} - e^a$ , כאשר

$a < \ln 0.5$ . מצא את הערך של  $a$ .

(12) נתונה הפונקציה  $f(x) = e^{\frac{x+1}{2}}$  (ראה ציור).

שיפוע הישר, המשיק לגרף הפונקציה בנקודה  $A$ ,

$$\text{הוא } \frac{e^2}{2}.$$

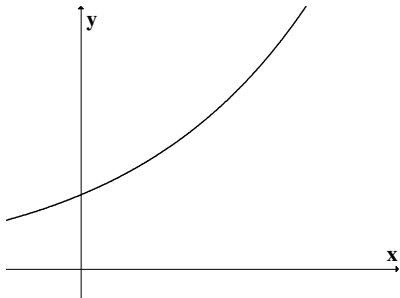
א. מצא את שיעורי הנקודה  $A$ .

ב. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה

בנקודה  $A$ .

ג. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה,

על ידי המשיק ועל ידי ציר ה- $y$ .



(13)

נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{8}{x} - 2$  בתחום  $x > 0$ .

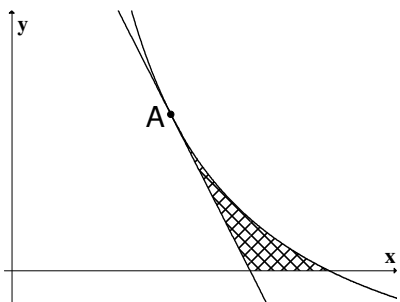
מעבירים ישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה

$A(2,2)$  (ראה ציור).

א. מצא את משוואת המשיק.

ב. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה,

על ידי המשיק ועל ידי ציר ה- $x$  (השטח המקווקו בציור).



(14) נתונות הפונקציות :

$$f(x) = \sin x ; 0 \leq x \leq \pi$$

$$g(x) = \cos 2x ; 0 \leq x \leq \pi$$

א. תאר במערכת צירים את הגרפים של שתי הפונקציות הנתונות.

ב. קווקו את השטח המוגבל בין הגרפים של שתי הפונקציות הנתונות וחשב את גודלו.

(15) נתונה הפונקציה  $f(x) = \operatorname{tg}^2 x$  בתחום  $-\frac{\pi}{2} < x \leq 0$ .

א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה  $x = -\frac{\pi}{4}$ .

ב. הראה כי  $\int \operatorname{tg}^2 x dx = \operatorname{tg} x - x + c$  ומצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה, על ידי המשיק ועל ידי ציר ה- $x$ .

(16) דרך הנקודה  $A(8,0)$  העבירו משיקים לפרבולה  $y = x^2 - 10x + 25$ .

א. מצא את משוואות המשיקים.

ב. חשב את השטח הכלוא בין שני המשיקים והפרבולה.

(17)

נתונה הפונקציה  $f(x) = x\sqrt{x} + 4$  בתחום  $x \geq 0$ .

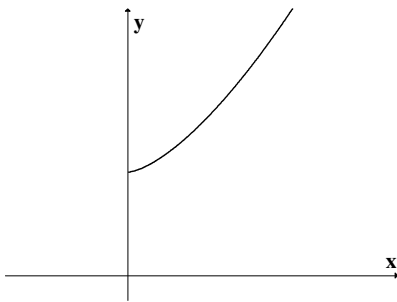
(ראה ציור)

א. מצא את משוואת הישר העובר דרך הנקודה

$(0,0)$  ומשיק לגרף הפונקציה הנתונה.

ב. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה

הנתונה, על ידי המשיק ועל ידי ציר ה- $y$ .



(18) א. חשב את הנגזרת של הפונקציה  $f(x) = \cos^3 x$ .

ב. חשב את השטח המוגבל על ידי ציר ה- $x$  ועל ידי גרף הפונקציה  $y = \cos^2 x \cdot \sin x$

$$\text{בתחום } \frac{1}{2}\pi \leq x \leq \frac{3}{2}\pi$$

\* לסטודנטים במקצועות ריאליים, ענו על סעיף ב ללא סעיף א.

(19) חשב את השטח הכלוא בין הפרבולה  $y^2 = -x$  והישר  $y = x + 6$ .

(20) חשב את השטח הכלוא בין הפרבולה  $x = y^2 + 2$  והישר  $y = x - 8$ .

(21) חשב את האינטגרלים הבאים: א.  $\int_0^a \sqrt{x^2 - a^2} dx$  ב.  $\int_{-a}^a \sqrt{a^2 - y^2} dy$

**חישוב אורך עקום (קשת)**

(22) חשב את אורך העקום הנתון בסעיפים הבאים:

$$(1 \leq x \leq 2) y = \frac{x^5}{15} + \frac{1}{4x^3} \quad (3) \quad (1 \leq x \leq 8) y = x^{2/3} \quad (2) \quad (1 \leq x \leq 2) y = \frac{x^4}{8} + \frac{1}{4x^2} \quad (1)$$

$$(1 \leq x \leq 8) x^{2/3} + y^{2/3} = 4 \quad (6) \quad (0 \leq x \leq 3) y = \frac{1}{3}\sqrt{x}(3-x) \quad (5) \quad (0 \leq x \leq 3) y = \frac{2}{3}(1+x^2)^{3/2} \quad (4)$$

$$(1 \leq x \leq 2) y = x^2 \quad (9) \quad (1 \leq x \leq 2) y = \ln x \quad (8) \quad (0 \leq y \leq 4) x = 3y^{3/2} - 1 \quad (7)$$

## פרק 26 - שימושי אינטגרל המסוים

### (חישוב נפח גוף סיבוב, שטח מעטפת של גוף סיבוב ונפח של גוף)

#### נפח של גוף סיבוב

(1) רשום את הנוסחאות לחישוב נפח גוף סיבוב, סביב ציר  $x$  וסביב ציר  $y$ , בשיטת הדיסקות (cavalieri) ובשיטת הקליפות הגליליות.

(2) השטח הכלוא בין גרף הפונקציה  $y = x^2$  ו-  $y = 2x$  מסתובב סביב ציר  $x$ .

חשב את נפח הגוף המתקבל בשתי דרכים:

א. שיטת הדיסקות (cavalieri).

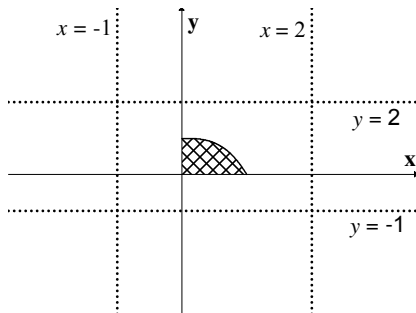
ב. שיטת הקליפות הגליליות.

(3) השטח הכלוא בין גרף הפונקציה  $y = x^2$  ו-  $y = 2x$  מסתובב סביב ציר  $y$ .

חשב את נפח הגוף המתקבל בשתי דרכים:

א. שיטת הדיסקות (cavalieri).

ב. שיטת הקליפות הגליליות.



(4) השטח הכלוא בין גרף הפונקציה  $f(x) = 1 - x^3$

והצירים מסתובב סביב:

א. ציר  $x$ . ב. הישר  $y = -1$ . ג. הישר  $y = 2$ .

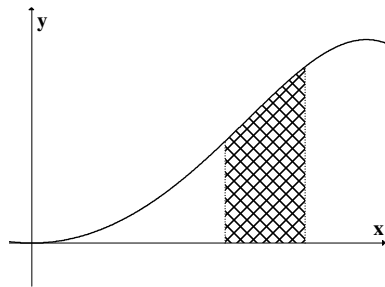
ד. ציר  $y$ . ה. הישר  $x = -1$ . ו. הישר  $x = 2$ .

מהו נפח הגוף המתקבל?

(5) נסח והוכח את הנוסחה לחישוב נפח גליל.

(6) נסח והוכח את הנוסחה לחישוב נפח חרוט.

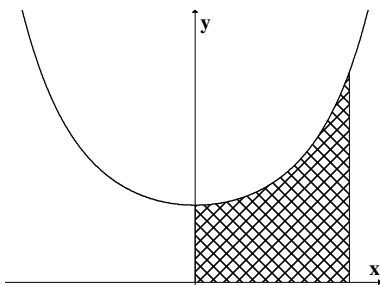
(7) נסח והוכח את הנוסחה לחישוב נפח כדור.



(8) השטח הכלוא בין גרף הפונקציה  $y = \sin(x^2)$

והישרים:  $y = 0$ ,  $x = \sqrt{\frac{\pi}{6}}$ ,  $x = \sqrt{\frac{\pi}{3}}$  מסתובב

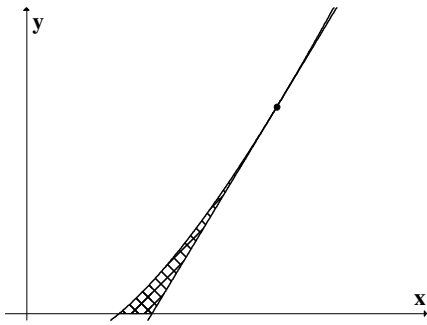
סביב ציר  $y$ . מהו נפח הגוף המתקבל.



(8) השטח הכלוא בין גרף הפונקציה  $y = e^{x^2}$

והישרים:  $y = 0$ ,  $x = \sqrt{\frac{\pi}{6}}$ ,  $x = \sqrt{\frac{\pi}{3}}$  מסתובב

סביב ציר  $y$ . מהו נפח הגוף המתקבל.



(9) השטח הכלוא בין גרף הפונקציה  $f(x) = x \ln x$ , המשיק לגרף בנקודה  $(e, e)$  וציר  $x$  מסתובב סביב ציר  $x$ . מהו נפח הגוף המתקבל?

#### שטח מעטפת של גוף סיבוב

(10) רשום את הנוסחאות לחישוב שטח מעטפת של גוף סי

(11) הפונקציה  $y = \sqrt{4 - x^2}$  עבור  $-1 \leq x \leq 1$  מסתובבת

מהו שטח המעטפת של הגוף שנוצר?

(12) נסח והוכח את הנוסחא לחישוב שטח מעטפת של חרו

(13) נסח והוכח את הנוסחא לחישוב שטח מעטפת של כדו

(14) הפונקציה  $x = \sqrt{9 - y^2}$ , עבור  $-2 \leq y \leq 2$  מסתובבת סביב ציר  $y$

מהו שטח המעטפת של הגוף שנוצר?

#### חישוב נפח

(15) מצא נוסחה לחישוב נפח פירמידה ישרה, אשר גובהה  $h$  ובסיסה הוא ריבוע שאורך צלעו  $a$ .

(16) מצא נוסחה לחישוב נפח פירמידה שבסיסה משולש ישר זווית שניצביו  $a$  ו- $b$  וגובהה  $c$ .

## פרק 27 - גזירת האינטגרל

(1) צטט את המשפט היסודי (השני) של החדו"א.  
 (2) על סמך המשפט היסודי הוכח כי אם  $f(x)$  רציפה ו-  $a(x), b(x)$  גזירות, אזי:

$$1) I(x) = \int_a^{b(x)} f(t) dt \Rightarrow I'(x) = f(b(x))b'(x)$$

$$2) I(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(t) dt \Rightarrow I'(x) = f(b(x))b'(x) - f(a(x))a'(x)$$

(3) גזור את הפונקציות הבאות:

$$I(x) = \int_{x^3}^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} \quad (4) \quad I(x) = \int_2^{x^3+x} t \ln t dt \quad (3) \quad I(x) = \int_1^{x^3} \frac{\ln t}{t^2} dt \quad (2) \quad I(x) = \int_2^x e^{-t^2} dt \quad (1)$$

(4) חשב את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x}{x-4} \int_4^x e^{t^2} dt \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \int_0^{x^2} \sin \sqrt{t} dt \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x t dt \cos t}{\sin^2 x} \quad (1)$$

$$(5) \text{ חקור את הפונקציה } F(x) = \int_0^x (t+1)^4 (t-1)^{10} dt \text{ לפי הפירוט הבא:}$$

תחום הגדרה, נקודות קיצון ותחומי עליה וירידה, נקודות פיתול ותחומי קמירות וקעירות.

## פרק 28 - אינטגרלים לא אמיתיים (מוכללים)

(1) חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\int_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} \quad (4) \quad \int_0^1 \sin \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^2} \quad (3) \quad \int_1^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} \quad (2) \quad \int_1^\infty \frac{xdx}{(1+x^2)^2} \quad (1)$$

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2} \quad (8) \quad \int_1^\infty x^2 e^{-2x} dx \quad (7) \quad \int_1^\infty \frac{x}{x^2+5} \quad (6) \quad \int_1^\infty x e^{-x^2} \quad (5)$$

(2) בדוק את התכנסות או התבדרות האינטגרלים הבאים :

$$\int_3^\infty \frac{\sin x \cdot \ln x}{x^2 \sqrt{x^2-4}} dx \quad (4) \quad \int_1^\infty \frac{\arctan x}{1+x^4} dx \quad (3) \quad \int_1^\infty \frac{x^2+2x+1}{x^3+4x^2+5} dx \quad (2) \quad \int_1^\infty \frac{x^2+2x+1}{x^4+4x^2+5} dx \quad (1)$$

$$\int_{-\infty}^2 \frac{e^{3x}}{1+x^2} dx \quad (8) \quad \int_0^\infty \frac{1}{1+x^4} dx \quad (7) \quad \int_2^\infty \frac{\sqrt{x^3+1}}{x} dx \quad (6) \quad \int_1^\infty (\sqrt{x^2+1}-x) dx \quad (5)$$

(3) חשב את השטח בין גרף הפונקציה  $y = e^{2x}$ , הישר  $x = 1$  וציר  $x$  עבור  $x \leq 1$ .

(4) חשב את השטח בין גרף הפונקציה  $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ , ציר ה- $y$ , ציר ה- $x$  והישר  $x = 5$ .

נוסחאות - גבולות

	$x \rightarrow -\infty$	$x \rightarrow 0$	$x \rightarrow \infty$
$y = \frac{1}{x}$	$\frac{1}{-\infty} = 0$	$\frac{1}{0^+} = \infty, \frac{1}{0^-} = -\infty$	$\frac{1}{\infty} = 0$
$y = e^x$	$e^{-\infty} = 0$	$e^0 = 1$	$e^\infty = \infty$
$y = \ln x$	---	$\ln(0^+) = -\infty$	$\ln(\infty) = \infty$
$y = \arctan x$	$\text{atan}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$	$\text{atan}(0) = 0$	$\text{atan}(\infty) = \frac{\pi}{2}$
$y = a^x, a > 1$	$a^{-\infty} = 0$	$a^0 = 1$	$a^\infty = \infty$
$y = a^x, 0 < a < 1$	$a^{-\infty} = \infty$	$a^0 = 1$	$a^\infty = 0$
$y = \sin x$	---	$\sin 0 = 0$	---
$y = \cos x$	---	$\cos 0 = 1$	---
$y = \frac{\sin x}{x}$	0	1	0
$y = \frac{\tan x}{x}$	---	1	---
$y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$	$e$	(from right) 1	$e$
$y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$	---	$e$	1
$y = \sqrt{x}$	---	$\sqrt{0^+} = 0$	$\sqrt{\infty} = \infty$
$y = \sqrt[3]{x}$	$-\infty$	$\sqrt[3]{0} = 0$	$\sqrt[3]{\infty} = \infty$

Defined Limits:

$$\infty \cdot \infty = \infty, \quad \infty(-\infty) = -\infty, \quad \infty + \infty = \infty, \quad \infty \pm a = \infty, \quad \infty \cdot (\pm a) = \pm \infty, \quad \infty / (\pm a) = \pm \infty$$

Undefined Limits :

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0$$



**נוסחאות - נגזרות**

1.  $y = a \rightarrow y' = 0$
2.  $y = f^n \rightarrow y' = n \cdot f^{n-1} \cdot f'$
3.  $y = e^f \rightarrow y' = e^f \cdot f'$
4.  $y = a^f \rightarrow y' = a^f \cdot f' \cdot \ln a$
5.  $y = \ln f \rightarrow y' = \frac{1}{f} \cdot f'$
6.  $y = \sin f \rightarrow y' = \cos f \cdot f'$
7.  $y = \cos f \rightarrow y' = -\sin f \cdot f'$
8.  $y = \tan f \rightarrow y' = \frac{1}{\cos^2 f} \cdot f'$
9.  $y = \cot f \rightarrow y' = -\frac{1}{\sin^2 f} \cdot f'$
10.  $y = \arcsin f \rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-f^2}} \cdot f'$
11.  $y = \arccos f \rightarrow y' = -\frac{1}{\sqrt{1-f^2}} \cdot f'$
12.  $y = \arctan f \rightarrow y' = \frac{1}{1+f^2} \cdot f'$
13.  $y = \operatorname{arccot} f \rightarrow y' = -\frac{1}{1+f^2} \cdot f'$
14.  $y = \sinh f \rightarrow y' = \cosh f \cdot f'$
15.  $y = \cosh f \rightarrow y' = \sinh f \cdot f'$
16.  $y = \tanh f \rightarrow y' = \frac{1}{\cosh^2 f} \cdot f'$
17.  $y = \operatorname{coth} f \rightarrow y' = -\frac{1}{\sinh^2 f} \cdot f'$
18.  $y = f(x)^{g(x)} \rightarrow y' = f(x)^{g(x)} \cdot (g(x) \cdot \ln(f(x)))'$

### נוסחאות - אינטגרלים

$$\int adx = ax + c$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int k^x dx = \frac{k^x}{\ln k} + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + c$$

$$\int \cot x dx = \ln|\sin x| + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$$

$$\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + c \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + c$$

$$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + c$$

$$\int k^{ax+b} dx = \frac{1}{a} \frac{k^{ax+b}}{\ln k} + c$$

$$\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + c$$

$$\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + c$$

$$\int \tan(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \ln|\cos(ax+b)| + c$$

$$\int \cot(ax+b) dx = \frac{1}{a} \ln|\sin(ax+b)| + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + c$$

$$\int \frac{1}{\cos x} dx = \ln \left| \frac{1}{\cos x} + \tan x \right| + c$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \ln \left| \frac{1}{\sin x} - \cot x \right| + c$$

$$\int \frac{1}{x^2-a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + c$$

$$\int \frac{f'}{f} dx = \ln|f| + c$$

$$\int e^f \cdot f' dx = e^f + c$$

$$\int \sin f \cdot f' dx = -\cos(f) + c$$

$$\int \sqrt{f} \cdot f' dx = \frac{2}{3} f^{\frac{3}{2}} + c$$

$$\int f \cdot f' dx = \frac{1}{2} f^2 + c$$

$$\int \cos f \cdot f' dx = \sin(f) + c$$

$$\int \frac{f'}{\sqrt{f}} dx = 2\sqrt{f} + c$$

$$\int u \cdot v' dx = u \cdot v - \int u' \cdot v dx$$

נוסחאות - טריגו

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\begin{cases} \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \\ \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \\ 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) \\ \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)) \\ \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)) \\ \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)) \end{cases}$$

$$\sin x = \sin \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2\pi k \\ x = (\pi - \alpha) + 2\pi k \end{cases}$$

$$\cos x = \cos \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2\pi k \\ x = -\alpha + 2\pi k \end{cases}$$

$$\tan x = \tan \alpha \Rightarrow x = \alpha + \pi k$$

$$\cot x = \cot \alpha \Rightarrow x = \alpha + \pi k$$

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = \pi k$$

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

## נוסחאות - אלגברה

$$\left\{ \begin{array}{l} (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \\ (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \\ (a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \\ (a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab \\ a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \\ a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 + b^2 - ab) \\ a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + b^2 + ab) \\ a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 \\ a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a^m a^n = a^{m+n} \\ \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \\ (a^m)^n = a^{mn} \\ (ab)^n = a^n b^n \\ \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \\ a^0 = 1 \\ a^{-n} = \frac{1}{a^n} \\ \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}, \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \\ a^x = b \Rightarrow x = \ln b \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} a > 0, b > 0 \\ \ln a + \ln b = \ln ab \\ \ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b} \\ \ln 1 = 0, \ln e = 1 \\ \ln e^n = n \\ \ln x^n = n \ln x \quad (x > 0) \\ e^{\ln x} = x \\ a^b = e^{b \ln a} \\ \ln x = k \Rightarrow x = e^k \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c \\ \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} |a| = \sqrt{a^2} = \begin{cases} a & \text{if } a \geq 0 \\ -a & \text{if } a < 0 \end{cases} \\ |a \cdot b| = |a| \cdot |b| \\ \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \\ |x| < a \Leftrightarrow -a < x < a \\ |x| > a \Leftrightarrow x < -a \text{ or } x > a \end{array} \right.$$

## נוסחאות - טורי מקלורן של פונקציות חשובות

### טור מקלורן

### תחום התכנסות

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad -\infty < x < \infty$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad -\infty < x < \infty$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad -\infty < x < \infty$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad -1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad -1 \leq x \leq 1$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x^1 + x^2 + x^3 + \dots \quad -1 < x < 1$$

$$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1) \cdot \dots \cdot (m-n+1)}{n!} x^n$$

$$= 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \dots$$

$-1 \leq x \leq 1 \quad (m > 0)$   
 $-1 < x \leq 1 \quad (-1 < m < 0)$   
 $-1 < x < 1 \quad (m \leq -1)$   
 $m \neq 0, 1, 2, 3, \dots$

## פרק 29 - קיצון תחת אילוצים של שלושה משתנים (כופלי

### לגרנג'ו

#### פונקציות של שלושה משתנים תחת אילוץ

(1) מבין כל התיבות הפתוחות שנפחן 32 סמ"ק, חשב את ממדי התיבה ששטח הפנים שלה הוא מינימלי.

(2) מצא על פני הכדור  $x^2 + y^2 + z^2 = 36$  את הנקודות הקרובות ביותר

לנקודה  $(1, 2, 2)$  ואת הנקודות הרחוקות ביותר מהנקודה  $(1, 2, 2)$ .

(3) א. מצא את המרחק הקצר ביותר מהנקודה  $(1, 2, 3)$  למישור  $-2x - 2y + z = 0$ .

ב. מצא נק' על המישור  $-2x - 2y + z = 0$  שהיא הקרובה ביותר לנק'  $(1, 2, 3)$ .

ג. בדוק תשובתך ע"י חישוב המרחק בעזרת הנוסחה למרחק בין נקודה למישור.

(4) מצא את הנקודות על המשטח  $z^2 = xy + 1$  הקרובות ביותר לראשית.

(5) מצא את המרחק הגדול ביותר והקטן ביותר מהאליפסואיד  $\frac{x^2}{96} + y^2 + z^2 = 1$

למישור  $3x + 4y + 12z = 288$ .

רמז: מרחק הנקודה  $(x_0, y_0, z_0)$  מהמישור  $ax + by + cz + d = 0$  הוא

$$\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

#### פונקציות של שלושה משתנים תחת אילוצים

(6) מצא מרחק מינימלי ומקסימלי בין העקום המתקבל מחיתוך הגליל  $x^2 + y^2 = 1$

והמישור  $z = x + y$  לבין ראשית הצירים.

(7) מצא מרחק מינימלי ומקסימלי בין העקום המתקבל מחיתוך האליפסואיד

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{25} = 1$$

והמישור  $z = x + y$  לבין ראשית הצירים.

#### הערה חשובה

בפתרון מרבית התרגילים בפרק זה, אנו מסיקים שנקודה קריטית היא נקודת קיצון משיקולים

פיסיקליים או גיאומטריים היות ומדובר בבעיות מעשיות.

ישנן דרכים מתמטיות מתקדמות להוכיח פורמלית, אך מאחר ולא נהוג ללמד אותן ברוב מוסדות

הלימוד, הסתפקנו בכך.

**פתרונות**

- (1) רוחב 4 ס"מ , אורך 4 ס"מ , גובה 2 ס"מ .
- (2) הנקודה הקרובה ביותר היא הנקודה (2, 4, 4).
- הנקודה הרחוקה ביותר היא הנקודה (-2, -4, -4).
- (3) מרחק מינימלי הוא 1 יחידות אורך. נקודה קרובה ביותר  $(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{10}{3})$ .
- (4) (0, 0, 1) , (0, 0, -1)
- (5) מרחק קצר ביותר  $\frac{256}{13}$  . מרחק ארוך ביותר  $\frac{320}{13}$  .
- (6) מרחק מינימלי 1 . מרחק מקסימלי  $\sqrt{3}$  .
- (7) מרחק מינימלי  $\frac{75}{17}$  . מרחק מקסימלי 10.

## פרק 30 - קיצון תחת אילוץ של פונקציה של שני משתנים (כופלי לגרנג')

### פונקציות של שני משתנים

מצא את המקסימום והמינימום של הפונקציות הבאות בכפוף לאילוץ הנתון:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 ; 2x^2 + 3xy = 1 - 2y^2 \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^2 - y^2 ; x^2 + y^2 = 1 \quad (2)$$

$$f(x, y) = 4x + 6y ; x^2 + y^2 = 13 \quad (3)$$

$$f(x, y) = x^2 y ; x^2 + 2y^2 = 6 \quad (4)$$

$$\text{Max}\{xy\} \quad \text{s.t.} \quad x + 3y = 12 \quad (5)$$

א. פתור את הבעיה. ב. הבא פתרון גרפי לבעיה.

$$\text{Max}\{2x + y\} \quad \text{s.t.} \quad \sqrt{x} + \sqrt{y} = 9 \quad (6)$$

א. פתור את הבעיה. ב. הבא פתרון גרפי לבעיה.

(7) מבין כל הנקודות הנמצאות על הישר  $x + 3y = 12$ , מצא את זו שמכפלת שיעוריה מקסימלי.

(8) מבין כל הנקודות שעל העקומה  $2x^2 + 3xy = 1 - 2y^2$  מצא את הנקודות שמרחקיהן מראשית הצירים הוא מינימלי ואת הנקודות שמרחקן מראשית הצירים הוא מקסימלי.

(9) מצא את המרחק הקצר ביותר מהישר  $3x - 6y + 4 = 0$  לפרבולה  $x^2 + 2xy + y^2 + 4y = 0$ .

רמז: מרחק הנקודה  $(x_0, y_0)$  מהישר  $ax + by + c = 0$  הוא  $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ .

(10) מוישלה קונה בשוק  $x$  ק"ג מלפפונים ו- $y$  ק"ג עגבניות. התועלת מצריכת הסל

$$u(x, y) = \ln x + \ln y$$

נתונה על ידי  $u(x, y) = \ln x + \ln y$ . מחיר ק"ג מלפפונים 1 ש"ח. מחיר ק"ג עגבניות 2 ש"ח.

מוישלה קובע לעצמו להשיג רמת תועלת  $\ln 16$  והוא מעוניין להשיג זאת בעלות מינימאלית. נסח ופתור את בעיית מוישלה.

(11) דני קונה בשוק  $x$  ק"ג מלפפונים ו- $y$  ק"ג עגבניות. התועלת מצריכת הסל

$$u(x, y) = xy$$

נתונה על ידי  $u(x, y) = xy$ . מחיר ק"ג מלפפונים 1 ש"ח. מחיר ק"ג עגבניות 3 ש"ח.

לדני תקציב של 12 ש"ח. נסח ופתור את בעיית דני.



(12) עקומת התמורה בין מנגו X ואננס Y היא  $x^2 + y^2 = 13$ .

לדני תועלת  $f(x, y) = 4x + 6y$ .

דני מחפש את הסל (אננס, מנגו)  $(x, y)$ , על עקומת התמורה, המביא למקסימום את התועלת שלו מצריכת מנגו ואננס. נסח ופתור את הבעיה.

(13) לייצרן פונקציית ייצור  $Q = \sqrt{K} + \sqrt{L}$ . המחירים ליחידת K ו-L הם  $P_K = 2, P_L = 1$ . היצרן נמצא ברמת תפוקה 100 והוא מחפש את הצירוף  $(K^*, L^*)$  המביא למינימום את העלות. נסח את בעיית היצרן (אל תפתור).

### פתרונות

$$\begin{array}{llll} \text{Max}(0, \pm 1) & \min(\pm 1, 0) & (2) & \text{Max}(\pm 1, \mp 1) \quad \min(\pm\sqrt{1/7}, \pm\sqrt{1/7}) & (1) \\ \text{Max}(\pm 2, 1) & \min(\pm 2, 1) & (4) & \text{Max}(2, 3) & \min(-2, -3) & (3) \\ & \text{Max}(9, 36) & (6) & & \text{Max}(6, 2) & (5) \\ \text{Max}(\pm 1, \mp 1) & \min(\pm\sqrt{1/7}, \pm\sqrt{1/7}) & (8) & & (6, 2) & (7) \\ & \min(\sqrt{32}, \sqrt{8}) & (10) & & 7 / \sqrt{45} & (9) \\ & \text{Max}(2, 3) & (12) & & \text{Max}(6, 2) & (11) \\ & & & \min\{2K + L\} & ; \sqrt{K} + \sqrt{L} = 100 & (13) \end{array}$$

**פרק 31 - קיצון של פונקציה בשני משתנים (רמה רגילה)**

עבור כל אחת מהפונקציות הבאות מצא נקודות קריטיות וסווג אותן למקסימום, מינימום או אוקף.

$$f(x, y) = 8x^3 + 12xy + 3y^2 - 18x \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20 \quad (2)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 4 \quad (3)$$

$$f(x, y) = 3x - x^3 - 2y^2 + y^4 \quad (4)$$

$$f(x, y) = e^{4y-x^2-y^2} \quad (5)$$

$$f(x, y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y \quad (6)$$

$$f(x, y) = \frac{x^2y^2 - 8x + y}{xy} \quad (7)$$

$$f(x, y) = e^x \cos y \quad (8)$$

$$(9) \text{ נתון משטח } z = x^3 + y^3 - 3xy + 4$$

מצא את משוואות המישורים המשיקים האופייניים למשטח.

(10) מבין כל התיבות הפתוחות שנפתחן 32 סמ"ק, חשב את ממדי התיבה ששטח הפנים שלה הוא מינימלי.

(11) מצא את המרחק הקצר ביותר מהנקודה (1, 2, 3) למישור  $-2x - 2y + z = 0$  וכן את הנקודה על המישור הקרובה ביותר לנקודה הנ"ל.

(12) יצרן מוכר מחשבוני, בארץ ובסין. עלות הייצור של מחשבון בארץ היא \$6 ועלות ייצור מחשבון בסין היא \$8. מנהל השיווק עומד את הביקוש  $Q_1$  למחשבון בארץ ואת הביקוש  $Q_2$  למחשבון בסין על ידי:

$$Q_1 = 116 - 30P_1 + 20P_2$$

$$Q_2 = 144 + 16P_1 - 24P_2$$

כיצד צריכה החנות לקבוע את מחירי המחשבוני,  $P_1$  ו- $P_2$ , על מנת למקסם את הרווח? מהו רווח זה?

**פתרונות**

- (1)  $(-0.5, 1)$  אוכף ;  $(1.5, -3)$  מינימום.
- (2)  $(1, 2)$  מינימום ;  $(-1, -2)$  מקסימום ;  $(-1, 2)$  ,  $(1, -2)$  אוכף.
- (3)  $(0, 0)$  אוכף ;  $(1, 1)$  מינימום.
- (4)  $(-1, -1)$  ,  $(-1, 1)$  מינימום ;  $(1, 0)$  מקסימום ;  $(-1, 0)$  ,  $(1, 1)$  ,  $(1, -1)$  אוכף.
- (5)  $(0, 2)$  מקסימום. (6)  $(4, 4)$  מקסימום.
- (7)  $(-0.5, 4)$  מקסימום. (8) אין נקודות קריטיות.
- (9)  $z = 3$  ,  $z = 4$  . (10) רוחב 4 ס"מ , אורך 4 ס"מ , גובה 2 ס"מ .
- (11) מרחק מינימלי הוא 1 יחידות אורך. נקודה קרובה ביותר  $(1/3, 4/3, 10/3)$  .
- (12)  $P_1=10\$$  ,  $P_2=12\$$  , רווח מקסימלי  $288\$$  .